Ιστορία των Μαθηματικών

opencourses.auth.gr/modules/course_description

Πληροφορίες

Περιεχόμενο μαθήματος

Περιεχόμενο μαθήματος

- Εισαγωγή. Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων.
- Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.
- Αρχιμήδης.
- Διόφαντος και Αραβικά Μαθηματικά.
- Μαθηματικά στην Αναγέννηση.
- Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.
- Κλασσική Άλγεβρα.
- Euler και Gauss.
- Αφηρημένη Άλγεβρα.
- Γραμμική Άλγεβρα.
- Περιήγηση στην Ιστορία της Στατιστικής.
- Τα 23 προβλήματα του Hilbert.

Διδάσκοντες

Διδάσκοντες

Διδάσκουσα:

Χαρά Χαραλάμπους, Καθηγήτρια

Βιογραφικό:

http://users.auth.gr/~hara/cv_greek.pdf

Ομάδα ανάπτυξης περιεχομένου - Επεξεργασία Υλικού:

Αναστασία Γρηγοριάδου

Προαπαιτούμενα

Προαπαιτούμενα

Το μάθημα απαιτεί οι φοιτητές να έχουν αποκτήσει το μαθηματικό υπόβαθρο που θα τους επιτρέψει να κατανοήσουν την εξέλιξη των μαθηματικών. Ειδικότερα οι φοιτητές πρέπει να έχουν έρθει σε επαφή με τα μαθηματικές έννοιες που καλύπτονται στα μαθήματα κορμού ενός τυπικού προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά.

Μαθησιακοί στόχοι

Μαθησιακοί στόχοι

Γενικές Ικανότητες:

- Εφαρμογή της γνώσης στην πράξη.
- Προσαρμογή σε νέες καταστάσεις.
- Λήψη αποφάσεων.
- Ομαδική εργασία.
- Σεβασμός στη διαφορετικότητα και στην πολυπολιτισμικότητα.
- Επίδειξη κοινωνικής, επαγγελματικής και ηθικής υπευθυνότητας και ευαισθησίας σε θέματα φύλου.
- Άσκηση κριτικής και αυτοκριτικής.
- Προαγωγή της ελεύθερης, δημιουργικής και επαγωγικής σκέψης.

Μέθοδοι διδασκαλίας

Μέθοδοι διδασκαλίας

Παρακολούθηση Διαλέξεων.

Μέθοδοι αξιολόγησης

Μέθοδοι αξιολόγησης

- Εξετάσεις.
- 2 Πρόοδοι ελέγχου των γνώσεων.
- Παλαιότερα θέματα εξετάσεων/προόδων.

Προτεινόμενα συγγράμματα

Προτεινόμενα συγγράμματα

1. Carl B. *Boyer*; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
2. Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
3. Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Βιβλιογραφία

Βιβλιογραφία

1. Carl B. *Boyer*; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
2. Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
3. Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 1: Εισαγωγή. Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 1.1: Εισαγωγή.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.
- Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων.

Σκοποί Ενότητας

- Παρουσίαση της γενικής εικόνας για το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης στους αρχαίους πολιτισμούς της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας.

Εξέλιξη

- **Γή** → Δημιουργία: πριν από 4.54 δισεκατομμύρια ($4.54x10^9$) χρόνια.
- **Ανθρωποειδή** → πριν από 2 εκατομμύρια ($2x10^6$) χρόνια.
- **Φωτιά** → ανακαλύφθηκε πριν από 790.000 ($7.9x10^5$) χρόνια.
- **Homo sapiens** → υπάρχει εδώ και 200.000 ($2x10^5$) χρόνια.

Τα πρώτα μαθηματικά, πότε χρονολογούνται;

Τι είναι μαθηματικά (I);

It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul.

Sonya Kovalevskaya (1850-1891)

Εικόνα 1



"Mathematics is the study of analogies between analogies. All science is. Scientists want to show that things that don't look alike are really the same. That is one of their innermost Freudian motivations. In fact, that is what we mean by understanding."

Gian-Carlo Rota (1933-1999)

Εικόνα 2



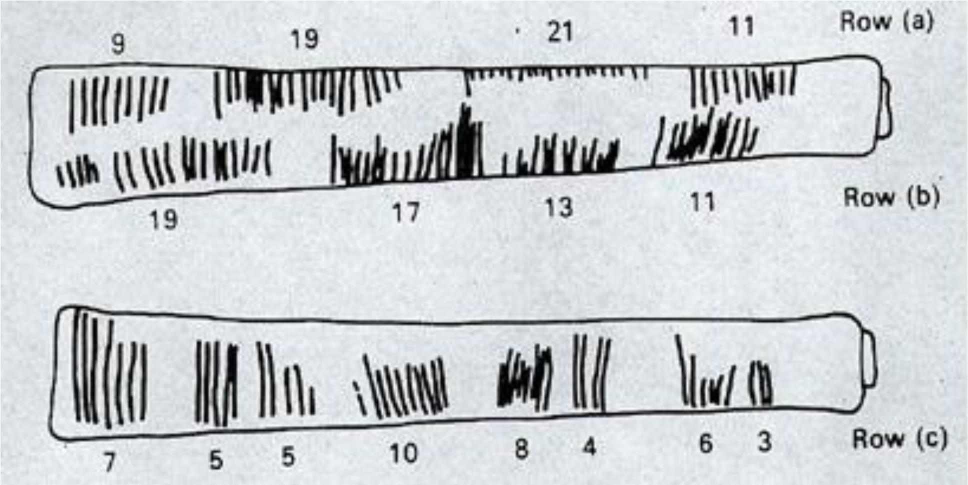
Τι είναι μαθηματικά (ΙΙ);

Οι εγκοπές σε κόκκαλα δείχνουν μαθηματική σκέψη;

Κόκκαλο Ishango (Uganda-Congo) 20.000 ($2x10^4$)



Εικόνα 3



Εικόνα 4

Ο πάπυρος του Rhind



Εικόνα 5

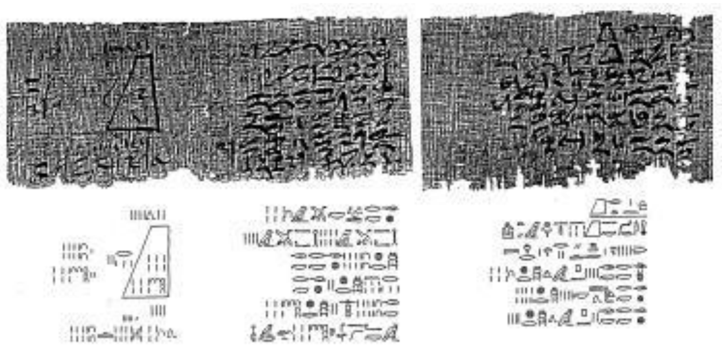
- Στην Αίγυπτο βρέθηκε ο πάπυρος του **Rhind** (~1650 π.Χ.) που περιέχει προβλήματα μαθηματικής φύσης (με τις λύσεις τους).
- Αγοράσθηκε από τον Σκωτσέζο **Rhind** το 1858.

Ο πάπυρος της Μόσχας

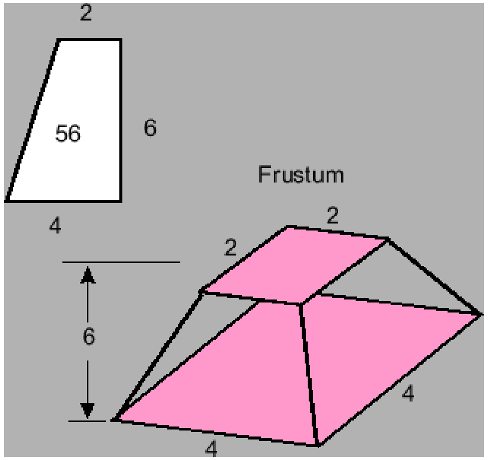
Στην Αίγυπτο επίσης βρέθηκε ο πάπυρος της Μόσχας (~1600π.Χ.)
Βρίσκεται στο Μουσείο Καλών Τεχνών της Μόσχας από το 1893 μ.Χ.

Ο όγκος της αποκομμένης Πυραμίδας:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6(2^2 + 4^2 + 2 \cdot 4) = 56$$



Εικόνα 6



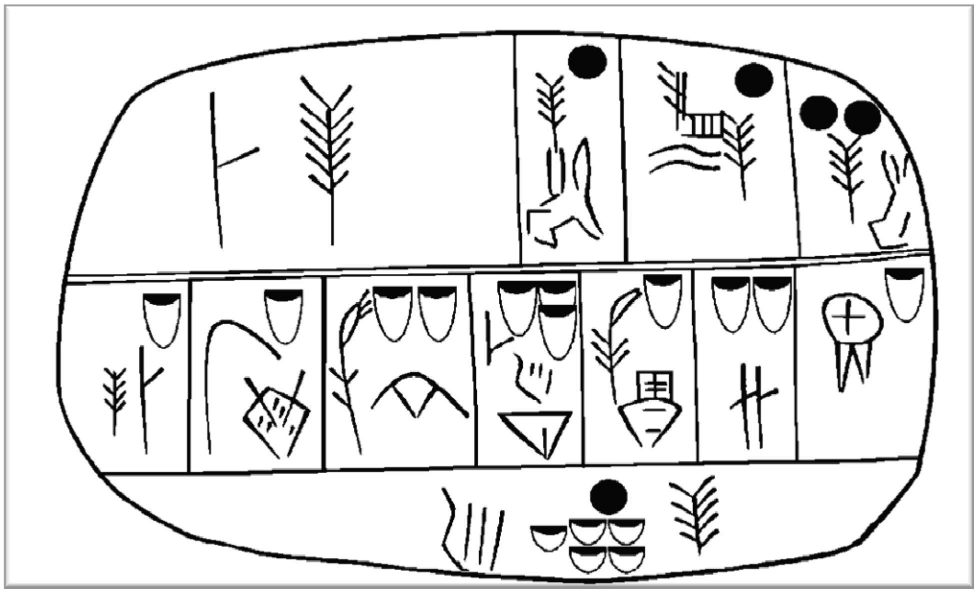
Σφηνοειδής γραφή (1)



3000 π.Χ. NBC5828 (Εικόνα 7)

Την ίδια εποχή και ίσως και νωρίτερα στη Μεσοποταμία κατέγραφαν μαθηματικά σε Πήλινες πλάκες με τη Σφηνοειδή γραφή.

Σφηνοειδής γραφή (2)



Εικόνα 8

Η πλάκα του Plimpton



Εικόνα 9

Στη Μεσοποταμία βρέθηκε και η πλάκα του Plimpton (1700 π.Χ.).

Οι στήλες δίνουν τριάδες του Πυθαγόρα (πολύ πριν τον Πυθαγόρα!)

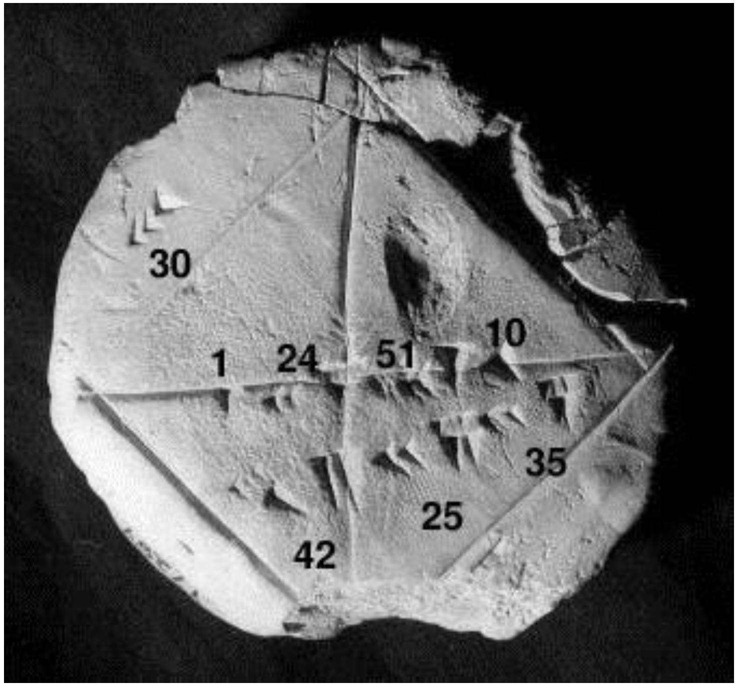
Μεσοποταμία

Yale Babylonian collection 1800 π.Χ.



Εικόνα 10

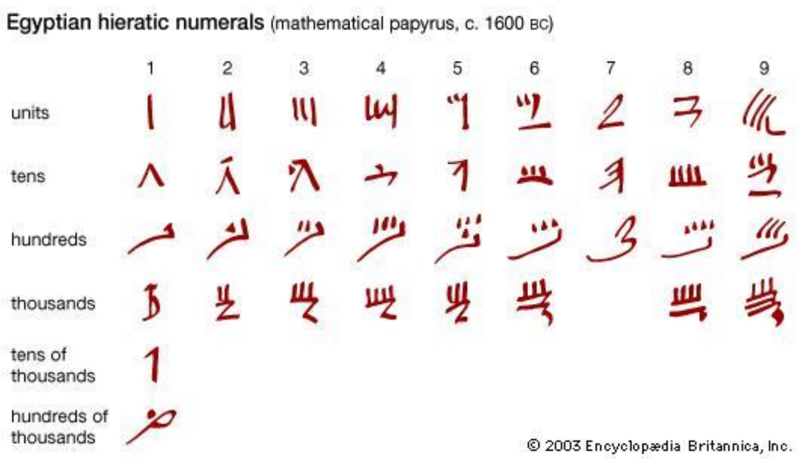
Εικόνα 11



Αρχαίοι Μαθηματικοί

- Πως παρίσταναν τους αριθμούς οι αρχαίοι Μαθηματικοί;
- Με τι είδους προβλήματα ασχολούνταν οι αρχαίοι Μαθηματικοί;
- Τι είδους γνώσεις είχαν; Τι αποδείξεις είχαν;
- Πως έγραφαν μαθηματικούς όρους και τύπους οι αρχαίοι Μαθηματικοί;
- Χρονολογίες για αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά;

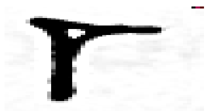
Ιερατική γραφή Αιγυπτίων



Εικόνα 12

Τα νούμερα στην ιερατική γραφή των αρχαίων Αιγυπτίων.

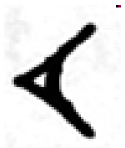
Αριθμοί στη Βαβυλωνία (1)



1 (και 60)



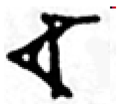
8



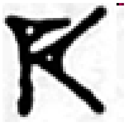
10



30

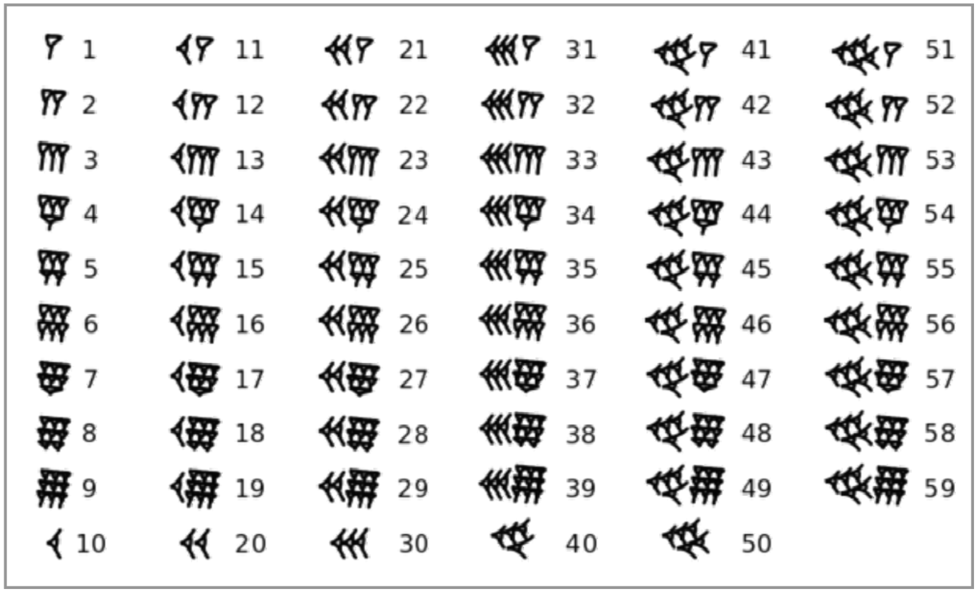


11



70 ή 1,10

Αριθμοί στη Βαβυλωνία (2)



Εικόνα 13

Ιωνική (αρχαία Ελληνική) αρίθμηση

α	alpha	1	ι	iota	10	ρ	rho	100
β	beta	2	κ	kappa	20	ϲ	sigma	200
γ	gamma	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mu	40	υ	upsilon	400
ε	epsilon	5	ν	nu	50	φ	phi	500
ς	stigma	6	ξ	xi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	ο	omicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
ϑ	theta	9	ϙ	koppa	90	ϡ	sampi	900

Εικόνα 14

Τι είδους μαθηματικά υπήρχαν στην Αίγυπτο και Μεσοποταμία;

Οι αρχαίοι μαθηματικοί στην Αίγυπτο και Μεσοποταμία μπορούσαν να χειριστούν με άνεση μαθηματικές ποσότητες. Είχαν σίγουρα σημαντικές γνώσεις βασικής γεωμετρίας (βλ. κατασκευή πυραμίδων στη αρχαία Αίγυπτο, προβλήματα παπύρων, πυθαγόρειες τριάδες στις πλάκες των μεσοποταμίων κ.λ.π.).

Για παράδειγμα είχαν αντιληφθεί ότι το εμβαδόν και η περιφέρεια του κύκλου εξαρτώνται από την ακτίνα του κύκλου μέσα από μία βασική σχέση και έδωσαν προσεγγίσεις για την ακτίνα του κύκλου!

Τι είναι εμβαδόν;

- Τι είναι εμβαδόν (σύμφωνα με τους αρχαίους Αιγυπτίους) Είχαν ορισμό για αυτήν την έννοια;
- Πως αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με μία σταθερά (π) επί το τετράγωνο της ακτίνας, ή ότι η ίδια σταθερά εμφανίζεται και στον τύπο για την περιφέρεια του κύκλου;
- Ακόμη πιο απλά πως αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς του;

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/5)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "Sofja Wassiljewna Kowalewskaja 1" by Unknown - http://www.goettingertageblatt.de/newsroom/wissen/dezentral/wissenlokal/art4263,603649. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sofja_Wassiljewna_Kowalewskaja_1.jpg#mediaviewer/File:Sofja_Wassiljewna_Kowalewskaja_1.jpg
- **Εικόνα 2:** "Gian-Carlo Rota blackboard Nizza 1970" by Konrad Jacobs - http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=3590. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0-de via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GianCarlo_Rota_blackboard_Nizza_1970.jpg#mediaviewer/File:Gian-Carlo_Rota_blackboard_Nizza_1970.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/5)

- **Εικόνα 3:** "**Os d'Ishango IRSNB**" by Ben2 - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Os_d%27Ishango_IRSNB.JPG#mediaviewer/File:Os_d%27Ishango_IRSNB.JPG
- **Εικόνα 4:** http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html
- **Εικόνα 5:** "**Rhind Mathematical Papyrus**" by Paul James Cowie (Pjamescowie) - http://www.archaeowiki.org/Image:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg#mediaviewer/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/5)

- **Εικόνα 6:** "**Moskou-papyrus**" by Unknown - Struve, Vasilij Vasil'evič, and Boris Turaev. 1930. Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik; Abteilung A: Quellen 1. Berlin: J. Springer. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Moskou-papyrus.jpg#mediaviewer/File:Moskou-papyrus.jpg
- **Εικόνα 7**: http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/NBC5828.html
- **Εικόνα 8:** http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/NBC5828.html
- **Εικόνα 9:**

  http://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/
- **Εικόνα 10:** "**Ybc7289-b2-traced**" by Ybc7289-bw.jpg: Bill Casselmanderivative work: Pmur002 (talk) - Ybc7289-bw.jpg. Licensed under Creative Commons Attribution 3.0 via Wikimedia Commons -

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/5)

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289-b2-traced.png#mediaviewer/File:Ybc7289-b2-traced.png

- **Εικόνα 11:** "**Ybc7289-bw**". Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289bw.jpg#mediaviewer/File:Ybc7289-bw.jpg
- **Εικόνα 12:** http://www.britannica.com/EBchecked/media/95242/Egyptian-hieratic-numerals
- **Εικόνα 13:** "**Babylonian numerals**" by Josell7 - File:Babylonian_numerals.jpg. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0-2.5-2.0-1.0 via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Babylonian_numerals. svg #mediaviewer/File:Babylonian_numerals.svg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/5)

- **Εικόνα 14:** http://www.lib.umich.edu/papyrology-collection/numbers

  Copyright

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 1: Εισαγωγή. Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 1.2: Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.
- Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων.

Σκοποί Ενότητας

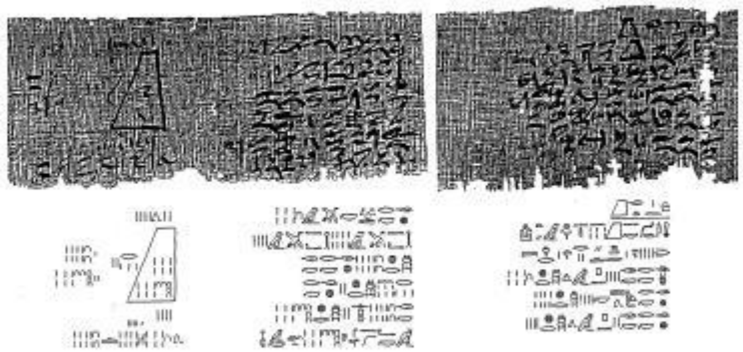
- Παρουσίαση της γενικής εικόνας για το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης στους αρχαίους πολιτισμούς της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας.

Μεσοποταμία-Αίγυπτος 3000-1000 π.Χ.



Εικόνα 1

Ο πάπυρος της Μόσχας



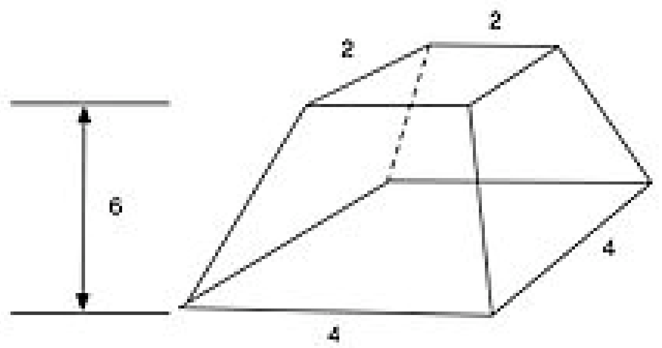
Εικόνα 2

Ο πάπυρος της Μόσχας (~1600π.Χ.) περιέχει 25 προβλήματα. Έχει μήκος 6 μέτρα και πλάτος περίπου 5 εκατοστά.

14ο πρόβλημα.

Βρίσκεται στο Μουσείο Καλών Τεχνών της Μόσχας από το 1893 μ.Χ.

Πρόβλημα: Να βρεθεί ο όγκος μίας (κομμένης) τετραγωνικής πυραμίδας



Εικόνα 3

«μετάφραση των συμβόλων:
Εάν σου πουν: μία κομμένη πυραμίδα με ύψος 6, με βάση πλευρά 4 και κορυφή πλευρά 2 : πάρε το τετράγωνο του 4, βρες 16. Διπλασίασε το 4, βρες 8. Πάρε το τετράγωνο του 2, βρες 4. Πρόσθεσε το 16, το 8 και το 4, βρες 28. πάρε το 1/3 του 6, βρες 2. Διπλασίασε το 28, βρες 56. Επιβεβαίωσε ότι είναι 56. Θα βρεις ότι είναι σωστό.»

Απόδειξη

Ο όγκος της πυραμίδας με βάση εμβαδού A ισούται και ύψος H είναι 1/3AH. Έστω ότι η πλευρά της βάσης είναι a.
Αν το κομμάτι της αποκομμένης πυραμίδας έχει ύψος h τότε η πυραμίδα της κορυφής έχει ύψος H-h. Έστω ότι η πλευρά της βάσης της είναι b.

Από όμοια τρίγωνα προκύπτει ότι $\frac{H-h}{a} = \frac{H}{b}$.

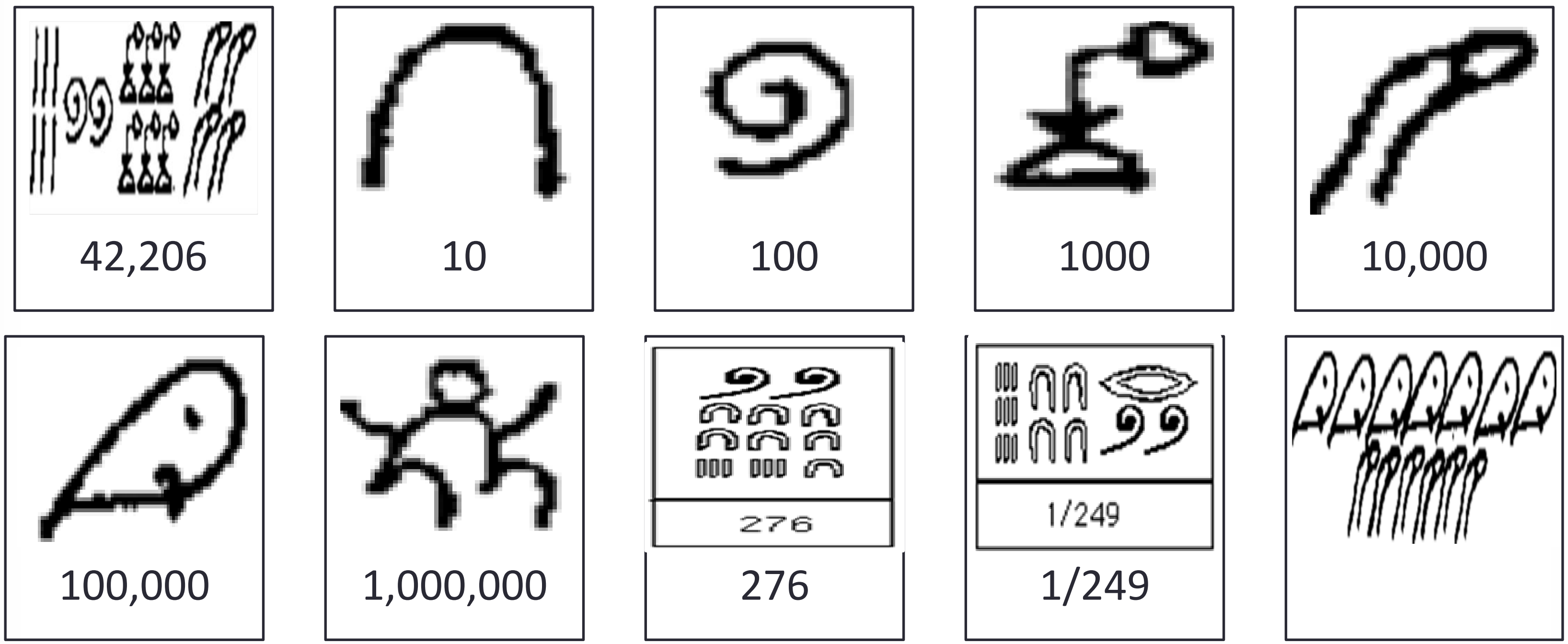
Έπεται ότι $\frac{H}{b} = \frac{h}{b-a}$.

Έτσι ο όγκος της αποκομμένης πυραμίδας είναι

$$V = \frac{1}{3}b^2H = \frac{1}{3}a^2(H-h)$$

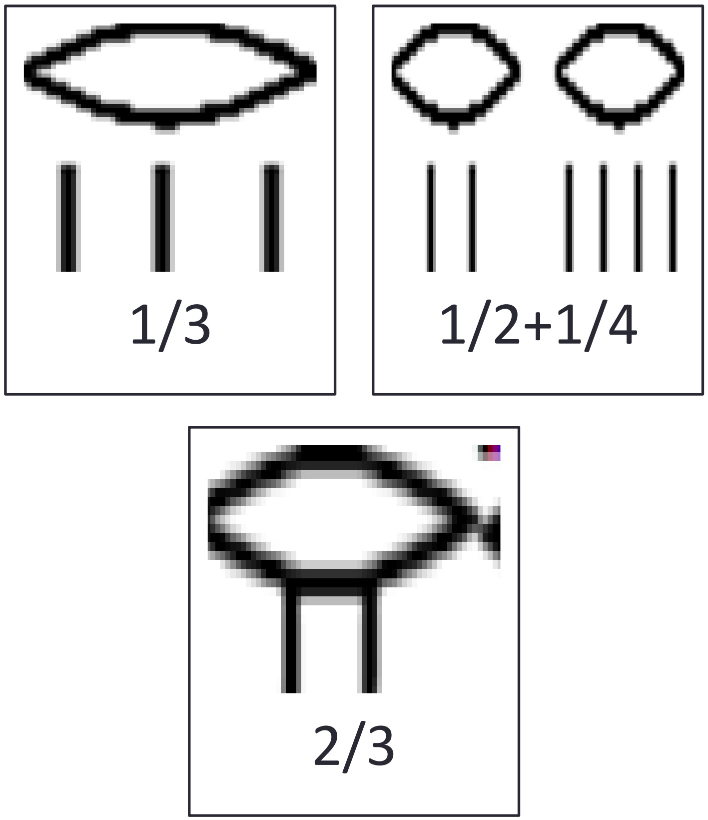
και τελικά αντικαθιστώντας $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$.

Τα νούμερα στην ιερατική γραφή των αρχαίων Αιγυπτίων



Εικόνα 4

Κλάσματα στους αρχαίους Αιγυπτίους



Εικόνα 5

- Παραδείγματα στην ιερογλυφική γραφή.
- «Αιγυπτιακό κλάσμα»: άθροισμα κλασμάτων με αριθμητή 1 και με διαφορετικούς παρανομαστές.
- Στον πάπυρο του Ahmes υπάρχει σειρά προβλημάτων που αφορούν το πως γράφονται οι εκφράσεις 2/n ως αιγυπτιακά κλάσματα.

Ο πάπυρος του Rhind---Ahmes



Εικόνα 6

Ο πάπυρος του Rhind---Ahmes …συνέχεια

- Ο πάπυρος του Rhind /Ahmes ~1650 π.Χ. είναι κατά τον Ahmes αντιγραφή από κείμενο 200 χρόνων παλαιότερο και περιέχει 87 μαθηματικά προβλήματα. Έχει μήκος 2 μέτρα, πλάτος 33 εκατοστά.
- 81 από αυτά τα προβλήματα έχουν λύσεις που αναφέρονται σε κλασματικές ποσότητες.
- Πρόβλημα 3, π. του Rhind: «να διαιρέσεις 6 φραντζόλες σε 10 άνδρες. Απάντηση :1/2+1/10.»

Πρόβλημα 3, πάπυρος του Rhind

Πρόβλημα 3: να διαιρέσεις 6 φραντζόλες σε 10 άνδρες.

Απάντηση : 1/2+1/10.

Με άλλα λόγια: 6/10=1/2+1/10

Φυσική ερμηνεία:

Στον κάθε άνδρα δίνεις μισή φραντζόλα και 1/10.

Στο τέλος θα έχεις κόψει στο μισό τις 5 φραντζόλες και την έκτη σε 10 κομμάτια.

(Είναι πιο εύκολο στη πράξη από το 3/5?)

Αιγυπτιακά κλάσματα

Ποια κλάσματα p/q (όπου $p < q$) γράφονται ως Αιγυπτιακά κλάσματα? (πόσους προσθετέους χρειαζόμαστε?)

Υπόδειξη:

Αν $p = 1$, τότε ο αλγόριθμος έχει λήξει.

Διαφορετικά: υπάρχει n έτσι ώστε $\frac{1}{n} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n-1}$.

Έπεται ότι $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} > 0.$

Από τη δεύτερη ανισότητα έπεται ότι ο αριθμητής του κλάσματος $\frac{pn-q}{qn}$ είναι μικρότερος του p.

Επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο έως ότου φτάσουμε σε κλάσμα με αριθμητή 1.

Πρόσθεση στο Αιγυπτιακό σύστημα

- Πρόσθεση είναι εύκολη στο αιγυπτιακό σύστημα:

Προσθέτουμε τα όμοια σύμβολα και αντικαθιστούμε με κατάλληλο σύμβολο όταν ξεπεράσουμε τις δεκάδες, εκατοντάδες, κ.λ.π.

Πολλαπλασιασμός

Για να υπολογίσουμε $a \times b$ ξεκινάμε με την δυάδα 1 και b.
Διπλασιάζουμε διαδοχικά το 1 και το b:

$$1 \ \rightarrow b,$$
$$2 \ \rightarrow 2b,$$
$$4 \ \rightarrow 4b,$$
$$8 \rightarrow 8b,$$

… ….

κ.λ.π. έως ότου το στοιχείο της πρώτης στήλης είναι μεγαλύτερο του a. Βρίσκουμε τις δυνάμεις του 2 που αθροίζουν στο a και αθροίζουμε τα αντίστοιχα πολλαπλάσια του b.

Παράδειγμα

19x12	
1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
19=1+2+16	
19x12=12+24+192=228	

- Εδώ καταφέραμε να γράψουμε το 19 ως άθροισμα δυνάμεων του 2. Μπορεί πάντα να γίνεται αυτό?

Πολλαπλασιασμός στην αρχαία Αίγυπτο

Φαίνεται ότι οι γραφείς πίστευαν ότι κάθε θετικός αριθμός γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων του 2.

Αυτό είναι όντως θεώρημα.

Πως όμως αποδεικνύεται?

Όχι μόνο δεν έχει σωθεί απόδειξη για αυτό στους παπύρους αλλά ούτε καν ένδειξη το πώς το ανακάλυψαν οι Αιγύπτιοι.

Η διαίρεση είναι το αντίστροφο του πολλαπλασιασμού.

Γραμμικές εξισώσεις και αρχαίοι Αιγύπτιοι

Πρόβλημα από πάπυρο της Μόσχας:

«Βρες την τιμή που όταν την πάρουμε μία και μισή φορές και μετά προσθέσουμε το 4 βρίσκουμε 10. »

(αντίστοιχη εξίσωση $1\frac{1}{2}x + 4 = 10$)

Περιγραφή λύσης:

«αφαίρεσε 4 από 10, βρες 6. πολλαπλασίασε με 2/3, βρες 4.»

Πρόβλημα 26, πάπυρος του Rhind:

Πρόβλημα 26, πάπυρος του Rhind:

«Βρες την τιμή που όταν την προσθέσεις στο $\frac{1}{4}$ του εαυτού της το αποτέλεσμα είναι 15.»

(αντίστοιχη εξίσωση $x + (1/4) * x = 15$.

Λύση:

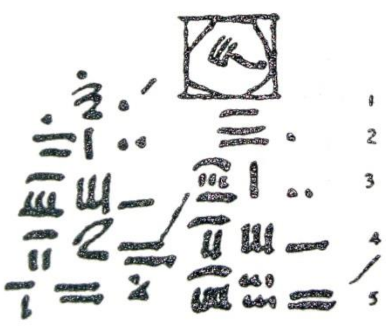
«έστω ότι η απάντηση είναι 4. Τότε 1 και $\frac{1}{4}$ του 4 είναι 5.

Πολλαπλασίασε το 5 για να βρεις 15. Η απάντηση είναι 3.
Πολλαπλασίασε το 3 με το 4. Η απάντηση είναι 12.»

Η λύση προυποθέτει γνώση αναλογιών.

Το εμβαδόν κύκλου στους Αιγύπτιους (1)

Οι Αιγύπτιοι αναγνώριζαν την σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν του κύκλου και το τετράγωνο της ακτίνας του. Θεωρούσαν ότι το εμβαδόν είναι 256/81 φορές το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου. (Έτσι έδιναν στο π την τιμή 256/81 που είναι περίπου 3.1604). Πιθανή εξήγηση από πρόβλημα και αντίστοιχη εικόνα στον πάπυρο του Ahmes:

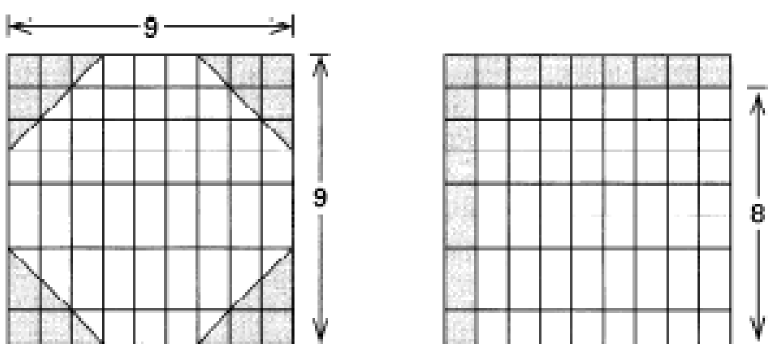


Εικόνα 7

Ο κύκλος μοιάζει με οκτάγωνο εγκλεισμένο σε τετράγωνο. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 9, μετράμε τα τετραγωνάκια εκτός οκταγώνου. Είναι 18. Άρα στο οκτάγωνο μένουν 81-18=63 τετραγωνάκια.

Το εμβαδόν κύκλου στους Αιγύπτιους (2)

Τοποθετούμε τα τετραγωνάκια που λείπουν οριζόντια και κάθετα στις παρυφές του αρχικού τετραγώνου. Προκύπτει ένα τετράγωνο με πλευρά 8. Το τετράγωνο αυτό έχει (κατά προσέγγιση) το εμβαδόν του αρχικού κύκλου με διάμετρο 9.



Γενικότερα: αν ο κύκλος έχει ακτίνα r τότε το τετράγωνο που έχει (κατά προσέγγιση το ίδιο εμβαδό με τον κύκλο) έχει πλευρά $2r - \frac{2r}{9}$.

Δηλαδή η πλευρά του είναι $\frac{16r}{9}$.

Το εμβαδόν κύκλου στους Αιγύπτιους (3)

Σύμφωνα με τις οδηγίες του παπύρου για να βρει κανείς το εμβαδόν ενός κύκλου με διάμετρο d θα πρέπει να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα:

Από τη διάμετρο d να αφαιρέσει $1/9d$ και στη συνέχεια να υψώσει στο τετράγωνο:

$$(8/9d)^2 = \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}(2r)^2 = 256/81r^2$$

Ερωτήματα για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων

- Υπήρχε διαχωρισμός ανάμεσα στις ακριβείς τιμές και στις προσεγγίσεις;
- Όλοι αυτοί οι γεωμετρικοί τύποι: πως προέκυψαν;
- Στηρίζανε οι Αιγύπτιοι τα αποτελέσματά τους σε αποδείξεις ή ήταν εμπειρικά;

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Ancient Egypt and Mesopotamia c. 1450 BC**" by Свифт/Svift - my work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ancient_Egypt_and_Mesopotamia_c._1450_BC.png#mediaviewer/File:Ancient_Egypt_and_Mesopotamia_c._1450_BC.png
- **Εικόνα 2:** "**Moskou-papyrus**" by Unknown - Struve, Vasilij Vasil'evič, and Boris Turaev. 1930. Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik; Abteilung A: Quellen 1. Berlin: J. Springer. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moskou-papyrus.jpg# mediaviewer/File:Moskou-papyrus.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

- **Εικόνα 3:** "**Pyramide-tronquée-papyrus-Moscou 14**" by Stumps - wikimedia. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pyramide-tronqu%C3%A9e-papyrus Moscou_14.jpg#mediaviewer/File:Pyramide-tronqu%C3%A9e-papyrus-Moscou_14.jpg
- **Εικόνα 4:** http://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_numerals
- **Εικόνα 5:** http://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_numerals
- **Εικόνα 6: "Rhind Mathematical Papyrus**" by Paul James Cowie (Pjamescowie)- http://www.archaeowiki.org/Image:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg#mediaviewer/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

- **Εικόνα 7:** “**Problème-R48-Papyrus-Rhind-texte**“ von Arnold Buffum Chace - The rhind mathematical papyrus (1929). Lizenziert unter Public domain über Wikimedia Commons –

  http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Probl%C3%A8me-R48-Papyrus-Rhind texte.jpg#mediaviewer/File:Probl%C3%A8me-R48-Papyrus-Rhind-texte.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 1: Εισαγωγή. Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 1.3: Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

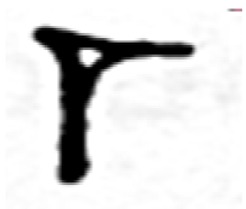
- Εισαγωγή.
- Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.
- Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων.

Σκοποί Ενότητας

- Παρουσίαση της γενικής εικόνας για το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης στους αρχαίους πολιτισμούς της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας.

Αρίθμηση στη Βαβυλωνία

Αρίθμηση στη Βαβυλωνία: βάση 60, συνδυασμός με 10, εξαρτώμενη από τη θέση των ψηφίων.



1 (και 60)



8



10



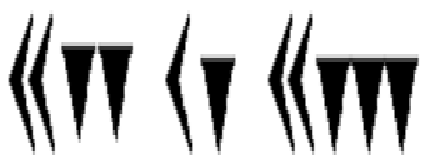
11



30



70



79883=$(22 * 60^2) + (11 * 60) + 23$

Πράξεις στην Βαβυλωνία

- Δεν έχουν βρεθεί πίνακες για πρόσθεση.
- Έχουν βρεθεί πολλοί πίνακες για τον πολλαπλασιασμό:

  Έτσι ένας πίνακας για τον αριθμό a περιλαμβάνει τα πολλαπλάσια

$$1 \times a, \ldots, 20 \times a, 30 \times a, 40 \times a, 50 \times a$$

- Έχουν βρεθεί επίσης πίνακες αντιστρόφων: δηλαδή δυάδες που δίνουν το 1, 60 ή γενικότερα δυνάμεις του 60.

Πίνακας (κανονικών) αριθμών και αντιστρόφων

Γράφουμε με αραβικά ψηφία αλλά χρησιμοποιούμε τη βαβυλωνιακή αντιστοίχιση (7,30= 7+30/60) .

2	30	16	**3,45**	**45**	**1,20**
3	**20**	**18**	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1,6,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

Κανονικοί αριθμοί

«**Κανονικοί**» αριθμοί είναι αυτοί που οι αντίστροφοί τους γράφονται με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων στα βαβυλωνιακά---(με βάση το 60).

Είναι οι αριθμοί που οι μόνοι τους διαιρέτες είναι 2,3,5, (δηλαδή οι διαιρέτες του 60).

Απόδειξη?

Αντίστροφοι Κανονικών αριθμών

Για την εύρεση αντιστρόφων κανονικών αριθμών εκτός πίνακα αντιστρόφων οι Βαβυλώνιοι εφάρμοζαν μία μέθοδο που (σε κάθε στάδιο) ανήγαγε το πρόβλημα εύρεσης του $1/n$ σε εύρεση κατάλληλων x, y έτσι ώστε $x + y = n$ και τουλάχιστον ένα από τα x, y να είναι σε πίνακα αντιστρόφων:

Neugebauer, O. (1935-37). Mathematische Keilschrifttexte I-III (MKT). Berlin, Springer

Αντίστροφοι Κανονικών αριθμών συνέχεια

Η διαίρεση γίνεται χρησιμοποιώντας

1) τους πίνακες πολλαπλασιασμού και
2) τους πίνακες των αντιστρόφων.

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$$

- Έχουν βρεθεί πίνακες με τετράγωνα, τετραγωνικές ρίζες, κύβους και κυβικές ρίζες.

Γραμμικές εξισώσεις και αρχαίοι Βαβυλώνιοι

Πρόβλημα από την πλακέτα (σε ελεύθερη μετάφραση):



Εικόνα 1

Ένα χωράφι παράγει 2/3 «κιλού σπόρων» ανά «μονάδα εμβαδού» ενώ το άλλο χωράφι παράγει 1/2 «κιλό σπόρων» ανά «μονάδα εμβαδού». Τα εμβαδά των δύο χωραφιών είναι 1800. Κάποια χρονιά το πρώτο χωράφι παρήγαγε 500 κιλά περισσότερους σπό- ρους από το άλλο. Ποια είναι τα εμβαδά?

Σύγχρονη αλγεβρική (γραμμική άλγεβρα) αντιμετώπιση:

Έστω x, y τα αντίστοιχα εμβαδά. Τότε

$\mathrm{x} + \mathrm{y} = 1800$ και $\frac{2}{3}\mathrm{x} - \frac{1}{2}\mathrm{y} = 500.$

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$x + y = 1800$$
$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500$$

Επίλυση με γραμμική άλγεβρα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1800 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 500 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 1 & 600 \end{bmatrix}$$

$x = 1200, y = 600.$

Μέθοδος επίλυσης σύμφωνα με την πλακέτα (ελεύθερη μετάφραση)

Θέτουμε x και y να είναι 900. Τότε

$$\frac{2}{3} * 900 - \frac{1}{2} * 900 = 150$$

Η διαφορά από το 500 είναι 350.

Προσθέτουμε 300 στο 900 και η απάντηση για το x είναι 1200.

Αφαιρούμε το 300 από το 900 και η απάντηση για το y είναι 600.

Εξήγηση της μεθόδου

Στη μία εξίσωση τα x, y έχουν τους ίδιους συντελεστές. Βλέπουμε τι γίνεται αν είναι ίσα. Η λύση σύμφωνα με αυτήν την εξίσωση είναι 900. Η επιλογή αυτή δεν είναι σωστή αφού η άλλη εξίσωση δεν ικανοποιείται: υπάρχει η διαφορά των 350.

Αν αυξήσουμε κατά μία μονάδα το x δηλαδή το κάνουμε 901 και μειώσουμε κατά μία μονάδα το y και το κάνουμε 899 τότε $901 + 899 = 1800$ ενώ

$$\frac{2}{3} * 901 - \frac{1}{2} * 899 = 150 + 7/6$$

Πράγματι:

$$\left(\frac{2}{3}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1)\right) - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 7/6.$$

Εξήγηση της μεθόδου συνέχεια

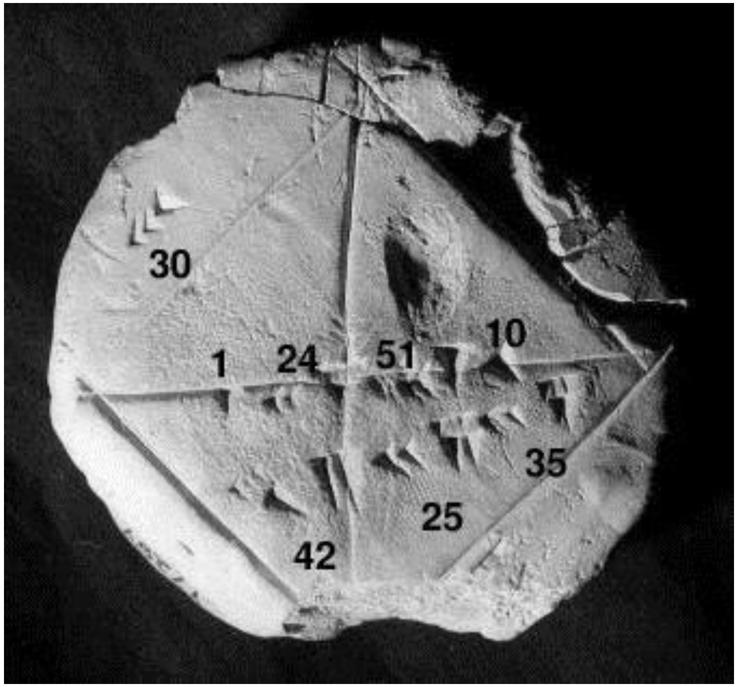
Έτσι αν προσθέσουμε s μονάδες στο 900 και το κάνουμε $900+s$ και αφαιρέσουμε s μονάδες από το 900 και έχουμε $900-s$ τότε το αποτέλεσμα αλλάζει κατά $\frac{7}{6}s$.

Για να ικανοποιηθεί η δεύτερη εξίσωση θα πρέπει $\frac{7}{6}s$ να καλύψει τη διαφορά των 350 μονάδων. Άρα $\frac{7}{6}s = 350$ και $s = 300$.

Συμπέρασμα

Οι Βαβυλώνιοι κατείχαν την έννοια της αναλογίας των τριών!

Η πλακέτα



Εικόνα 2

Η πλακέτα (1800 π.Χ.) τώρα βρίσκεται στη συλλογή στο Yale.

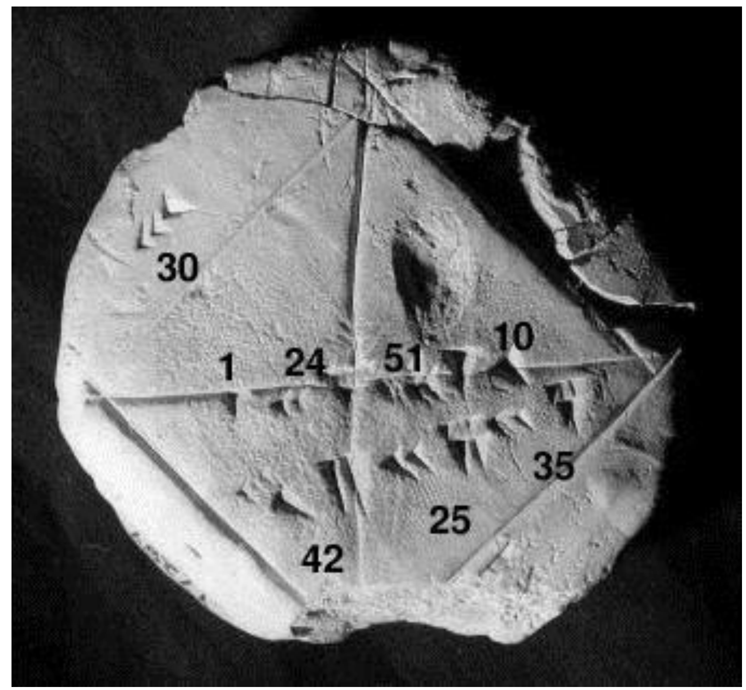
Μεσοποταμία

Yale Babylonian collection 1800 π.Χ.



Εικόνα 3

Εικόνα 4



Ο αριθμός

Ο αριθμός στη διαγώνιο είναι ο

1,24,51,10

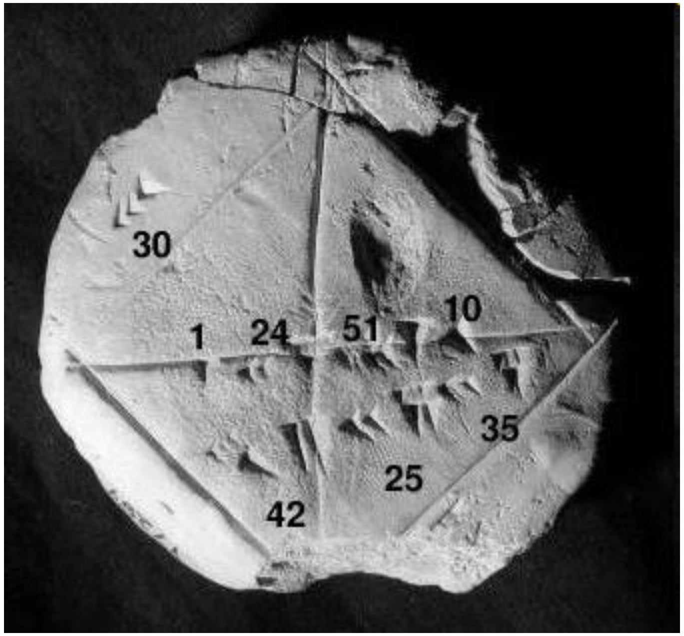
όπου

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.41421296$$

Αναγνωρίζουμε τον αριθμό αυτό ως προσέγγιση της τετραγωνική ρίζα του 2

$$\sqrt{2}$$

Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στους τρεις αριθμούς;



Εικόνα 5

30

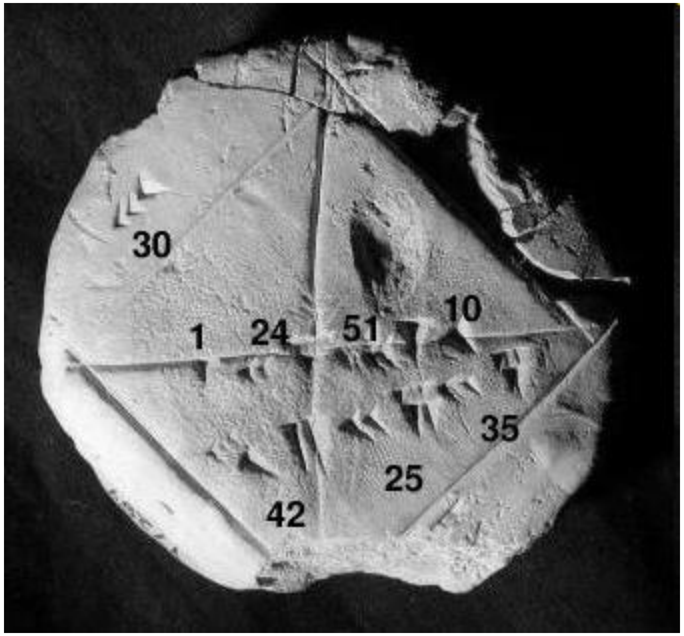
1,24,51,10

42,25,35

***ο τρίτος αριθμός προκύπτει από τους άλλους δύο ως το γινόμενο τους ***

Πολλαπλασιασμός με το 30 είναι το ίδιο με τη διαίρεση με το 2 αφού 30 *2=60.

Πόσο είναι το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με ακμή a;



Εικόνα 6

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{2}$$

Αν λοιπόν 30 είναι το μήκος της ακμής του τετραγώνου, τότε 42,25,35=30*1,24,51,10 είναι το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου!

Η πλάκα υποδεικνύει ότι αν το μήκος μιας ακμής του τετραγώνου είναι 30 τότε για να βρούμε το μήκος της διαγωνίου πολλαπλασιάζουμε 30 με το 1,24,51,10.

Μέθοδος των Βαβυλωνίων

- Οι Βαβυλώνιοι είχαν γνώση του Πυθαγορείου Θεωρήματος(?)
- Είχαν αναπτύξει κάποια τεχνική για την εύρεση τετραγωνικών ριζών.

Η τεχνική που πιστεύουμε ότι είχαν αναπτύξει την αποκαλούμε σήμερα μέθοδο των Βαβυλωνίων ή μέθοδο του Ήρωνα (150 μ.Χ). Η μέθοδος αυτή μοιάζει ιδιαίτερα με τη μέθοδο του Νεύτωνα (1642-1727):

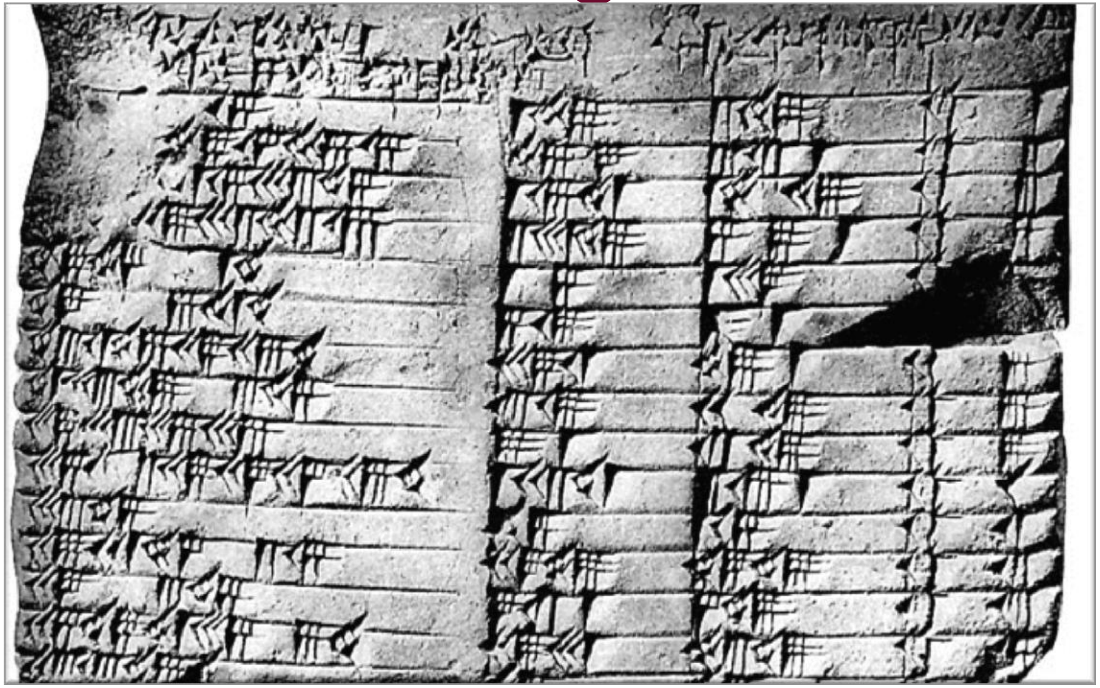
Για να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του b ξεκινάμε με μία τιμή a_1. Στη συνέχεια παίρνουμε $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{b}{a_1}\right)$ κ.ο.κ.ε.

Τετραγωνική ρίζα του 2

$\sqrt{2}$	
1.41421296	Τιμή των Βαβυλωνίων
1.41421356	Τιμή (προσέγγιση) έως 8 δεκαδικά ψηφία

- Έχουν υπολογιστεί 200,000,000,000 ψηφία για τη τετραγωνική ρίζα του 2 (2006).
- Ενδιαφέρουσες ιδιότητες:
  - το αντίστροφο της ρίζας 2 είναι ίση με το μισό της ρίζας 2.
  - μη ρητός αριθμός.
  - κ.ο.κ.

Πλάκα του Plimpton 1700 π.Χ.



Εικόνα 7

Τριάδες του Πυθαγόρα

Ταμπλέτα του Plimpton

0.9834028	119	169	1
0.9491586	3367	4825	2
0.9188021	4601	6649	3
0.8862479	12,709	18,541	4
0.8150077	65	97	5
0.7851929	319	481	6
0.7199837	2291	3541	7
0.6845877	799	1249	8
0.6426694	481	769	9
0.5861226	4961	8161	10
0.5625	45	75	11
0.4894168	1679	2929	12
0.4500174	161	289	13
0.4302388	1771	3229	14
0.3871605	56	106	15

Ταμπλέτα του Plimpton,

(O. Neugebauer and A. Sachs, **Mathematical cuneiform texts**, American Oriental Society, 1945)

$$(3/4)^2 = 0{,}5625$$

$$\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{75}{60} = \frac{5}{4}$$

τριάδα (3,4,5)

Πλάκα του Plimpton

y	$\left(\frac{x}{y}\right)^2$	x	d	#
120	0.9834028	119	169	1
3456	0.9491586	3367	4825	2
4800	0.9188021	4601	6649	3
13,500	0.8862479	12,709	18,541	4
72	0.8150077	65	97	5
360	0.7851929	319	481	6
2700	0.7199837	2291	3541	7
960	0.6845877	799	1249	8
600	0.6426694	481	769	9
6480	0.5861226	4961	8161	10
60	0.5625	45	75	11
2400	0.4894168	1679	2929	12
240	0.4500174	161	289	13
2700	0.4302388	1771	3229	14
90	0.3871605	56	106	15

(φαίνεται οπτικά από την πλάκα ότι έχει σπάσει το κομμάτι που είχε μία ακόμα στήλη, αυτή που συμπληρώνουμε ως πρώτη στήλη των y…) όπου x, y δύο πλευρές ενός ορθού τριγώνου και d η υποτείνουσα.

Τριάδες του Πυθαγόρα και Βαβυλώνιοι

Ερμηνεία για τον τρόπο εύρεσης των τριάδων

- $x^2 + y^2 = d^2 \Rightarrow (x/y)^2 + 1 = (d/y)^2$
- $u = \frac{x}{y}, v = \frac{d}{y}$
- $u^2 + 1 = v^2 \Leftrightarrow v^2 - u^2 = 1$

και αφού

$v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$

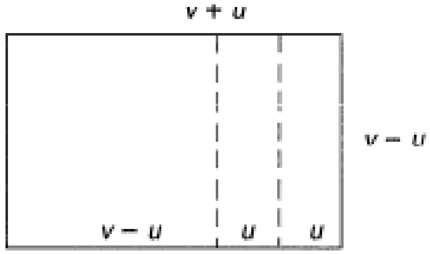
$\Leftrightarrow (v-u)(v+u) = 1$

Δηλαδή αντί να ψάχνουμε x, y, d έτσι ώστε $x^2 + y^2 = d^2$ ψάχνουμε v, u έτσι ώστε $(v-u)(v+u) = 1$. Από τον τύπο του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $(v-u)$ και $(v+u)$ είναι οι ακμές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει εμβαδό 1.

Δίνουμε στο $v+u$ την τιμή a. Τότε $v-u = \frac{1}{a}$ και μπορεί να βρεθεί από τον πίνακα των αντιστρόφων. Για να βρούμε λοιπόν v, u λύνουμε τις δύο γραμμικές εξισώσεις $v+u = a$, $v-u = \frac{1}{a}$. Τέλος πολλαπλασιάζοντας με y (αφού $u = \frac{x}{y}, v = \frac{d}{y}$) βρίσκουμε τις τριάδες της πλάκας του Plimpton.

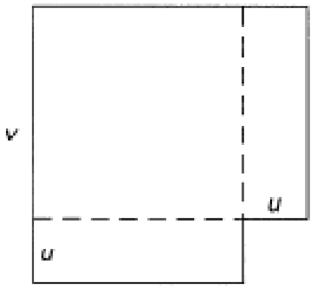
Πως γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι ότι $v^2 - u^2 = (v+u)(v-u)$ (για κάθε v και u?)?

(υπενθύμιση: η αλγεβρική γραφή δεν είχε ακόμα εφευρεθεί…)



Μία πιθανή γεωμετρική εξήγηση:
Έστω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $(v+u)$ και $(v-u)$.
Στην ακμή $v+u$ χαράσσουμε το $v-u$, το τμήμα που περισσεύει είναι $2u$.
Διαιρούμε λοιπόν το αρχικό παραλληλόγραμμο σε 3 μέρη: ένα τετράγωνο με ακμή $v-u$, και δύο παραλληλόγραμμα με ακμές u και $v-u$.

Πως γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι ότι $v^2 - u^2 = (v+u)(v-u)$



Στρέφουμε κατά 90° το τελευταίο παραλληλόγραμο και το μεταφέρουμε έτσι ώστε να κολλήσει με το τετράγωνο που έχει ακμή $v - u$. Παίρνουμε το τετράγωνο με ακμή v από το οποίο λείπει το τετραγωνάκι με ακμή u. Άρα το εμβαδόν είναι $v^2 - u^2$.

Ήταν τυχαίες οι τριάδες; Γνώριζαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα οι Βαβυλώνιοι?

Υπάρχουν προβλήματα στις πλάκες τους που κάνουν χρήση του θεωρήματος.

Για παράδειγμα, στην πλάκα BM85196 υπάρχει το παρακάτω πρόβλημα:

«μία κολώνα μήκους 30 στηρίζεται (κάθετα) σε έναν τοίχο. Η επάνω άκρη γλιστράει μία απόσταση 6. Πόσο γλίστρησε η κάτω άκρη?»

Η απάντηση δίνεται ως "η τετραγωνική ρίζα του $30^2 - 24^2$" και υπολογίζεται να είναι 18.

(όταν γλιστρήσει η σκάλα, σχηματίζεται ένα ορθό τρίγωνο, που η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος 24=30-6, ενώ η υποτείνουσα έχει μήκος 30. Υπολογίζουμε το μήκος της βάσης).

Λύση δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων

- Θα συζητηθούν σε επόμενο μάθημα.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** http://primeviridian.blogspot.gr/2015/03/ancient-babylonian-mathematics-tablet.html
- **Εικόνα 2:** "**Ybc7289-bw**". Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289bw.jpg#mediaviewer/File:Ybc7289-bw.jpg
- **Εικόνα 3:** "**Ybc7289-b2-traced**" by Ybc7289-bw.jpg: Bill Casselmanderivative work: Pmur002 (talk) - Ybc7289-bw.jpg. Licensed under Creative Commons Attribution 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289-b2-traced.png#mediaviewer/File:Ybc7289-b2-traced.png

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 4,5,6:** "**Ybc7289-bw**". Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289bw.jpg#mediaviewer/File:Ybc7289-bw.jpg
- **Εικόνα 7:** "**Plimpton 322**" by photo author unknown - image copied from http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg#mediaviewer/File:Plimpton_322.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 1: Εισαγωγή. Τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων. Ενότητα 1.3: Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων.». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.1: Τι είναι απόδειξη;

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

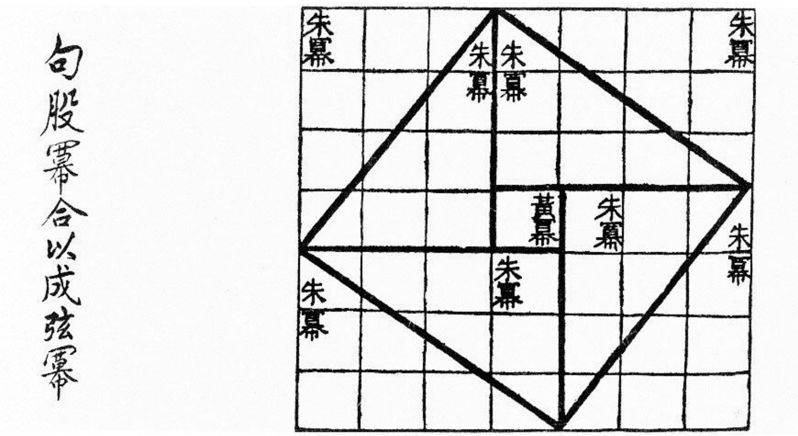
- Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Πυθαγόρειο Θεώρημα

- Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.
- Πυθαγόρειο Θεώρημα, όπως εμφανίζεται στα «Στοιχεία»

του Ευκλείδη, (πρόταση 47, βιβλίο 1, ~300 π.Χ.).

Αποδείξεις για το Πυθαγόρειο Θεώρημα

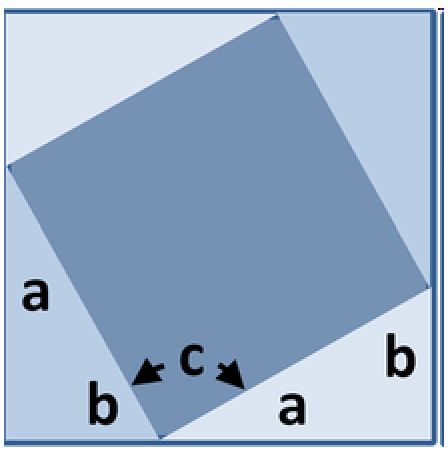


Chou Pei Suan Ching

4ος π.Χ. – 2ος μ.Χ.

Εικόνα 1

Σχήμα

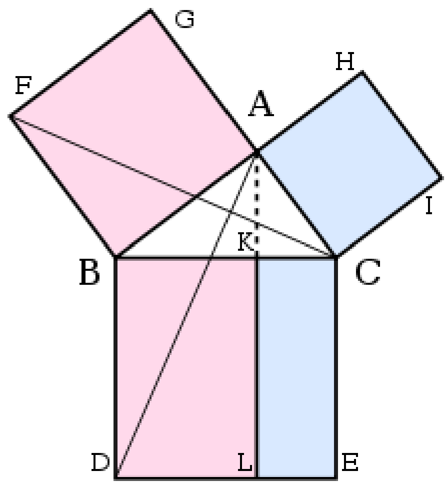


- Οι πλευρές του τετραγώνου έχουν μήκος $(a + b)$ όπου a η μία πλευρά του ορθού τριγώνου και b η άλλη. Έστω c η υποτείνουσα.
- Το εσωτερικό σχήμα είναι και αυτό τετράγωνο.
- Αφού τα εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου ισούται το άθροισμα των εμβαδών των 4 ορθών τριγώνων και του εσωτερικού τετραγώνου το ζητούμενο προκύπτει.

Ερωτήσεις

- Πως γνωρίζουμε το εσωτερικό σχήμα είναι τετράγωνο?
- Πως προκύπτει ο τύπος για το εμβαδόν του τριγώνου? (τον χρειαστήκαμε πραγματικά?)
- Πως προκύπτει ο τύπος για το ανάπτυγμα τετραγώνων?
- Πως ορίζουμε το εμβαδόν?

Πυθαγόρειο Θεώρημα, βιβλίο «Στοιχεία» του Ευκλείδη



βιβλίο1
Πρόταση 47

- Ροζ=Ροζ,
- Γαλάζιο=Γαλάζιο

  ABFG =KBDL αφού

Ροζ:→

ABFG =2 CBF (γιατί?)
και
KBDL =2 ABD (γιατί?)
και CBF= ABD

Γιατί ο Ευκλείδης διαλέγει αυτή την απόδειξη?

Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά
7ο αιώνα π.Χ ---4ο αιώνα μ.Χ.



Εικόνα 2

Πρώτη περίοδος:

- Θαλής ο Μιλήσιος (630-550π.Χ.)
- Πυθαγόρας ο Σάμιος (570-490)
- Ζήνωνας ο Ελεάτης (490- 430)
- Δημόκριτος ο Αβδηρίτης (c. 460-370)
- Πλάτων (427-347 π.Χ.)

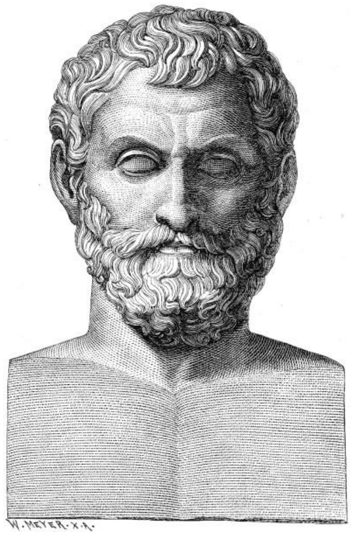
Πηγές για τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά

Ιστορικές πηγές, όπως

- Ηρόδοτος (5ος αιώνας π.Χ.) και άλλοι,
- (αποσπασματικές πληροφορίες),
- Ο Εύδημος (4ος αιώνας π.Χ.) ο πρώτος ιστορικός των επιστημών!
- Βιβλία του: Ἀριθμητικὴ ἱστορία, Γεωμετρικὴ ἱστορία, Ἀστρολογικὴ ἱστορία, μαθήματα του Αριστοτέλη
- Πλούταρχος (1ος αιώνας μ.Χ.)
- Πρόκλος (5ο αιώνα μ.Χ.) (περίληψη από βιβλίο ιστορίας του Εύδημου από τη Ρόδο (4ο αιώνα π.Χ.).)

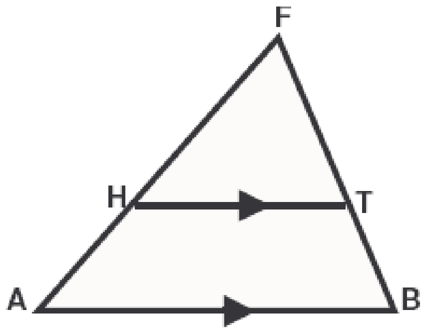
Θαλής ο Μιλήσιος (630-550 π.Χ.)

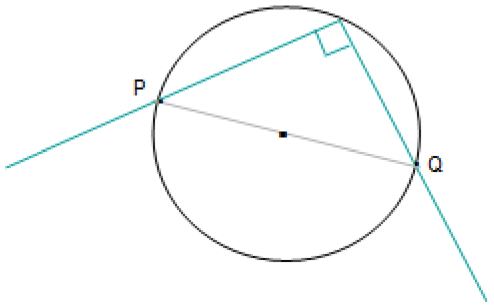
Ένας από τους 7 Σοφούς της Αρχαιότητας



Εικόνα 3

FH/HA=FT/TB





Αποδείξεις: Με τι εργαλεία;

Τι δεχόμαστε ως γνώση? Ποια είναι τα προαπαιτούμενα?

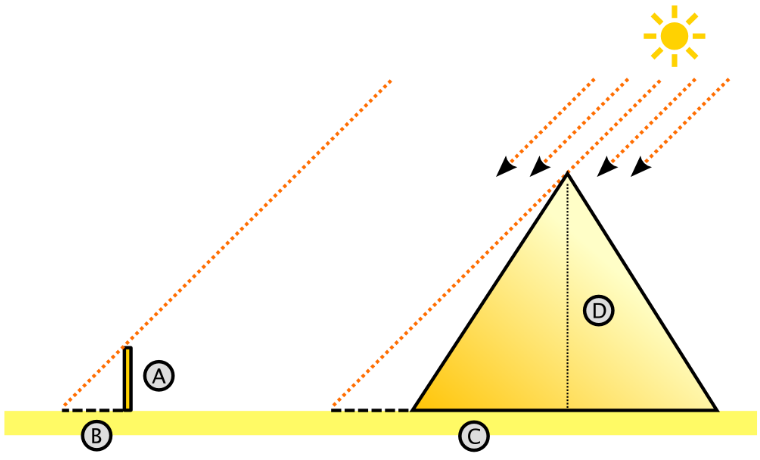
Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων του Θαλή δεν είναι δύσκολες (να τα αποδείξετε) αν δεχτούμε ως αληθή ότι το

- Άθροισμα των γωνιών σε ένα τρίγωνο είναι δύο ορθές γωνίες.
- Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι βάση επί ύψος δια 2.

Υπάρχουν όμως αποδείξεις για τα παραπάνω? Είναι θεωρήματα ή αξιώματα;

(Ισχύουν οι αντίστροφες προτάσεις?)

Πυραμίδα του Χέωπα



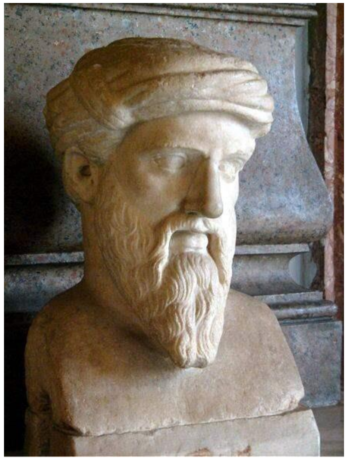
Εικόνα 4

- Ύψος: 147 μέτρα (σήμερα είναι 138 μέτρα). Βάρος ογκολοίθων: 6.000.000 τόνοι .
- Μέτρηση του Θαλή: 145,3.

Πυθαγόρας (570-490) και οι Πυθαγόρειοι

Οι αριθμοί αποτελούν τη βάση του κόσμου.

«Το παν είναι αριθμός»



Εικόνα 5

Πυθαγόρεια Σχολή

- Μυστική οργάνωση στον Κρότωνα της Ιταλίας, μία θρησκευτική κίνηση με έντονη πολιτική δραστηριότητα. Είχε κοινοβιακή μορφή για τους μυημένους.
- Η ιδιοκτησία και η γνώση θεωρούνταν κοινές.
- Πρωταρχικός ρόλος στην καθιέρωση της μαθηματικής επιστήμης ως επιστήμης βασισμένη στη λογική και απομάκρυνση από λογιστικούς υπολογισμούς.
- Μαθηματικά συγγενικά προς την αγάπη της σοφίας.
- Φιλοσοφία: αγάπη της σοφίας.
- Μαθηματικά: αυτό που μαθαίνεται.

Ιδιότητες των φυσικών αριθμών

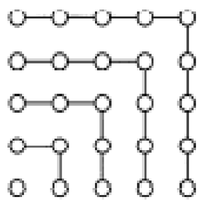
Ας αναπαραστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς με αντίστοιχο αριθμό από βότσαλα (τελείες):

- Άρτιοι και Περιττοί αριθμοί: άρτιοι αν τα βότσαλα χωρίζονται σε δύο ομάδες με τον ίδιο αριθμό από βότσαλα, περιττοί αν όχι.

Παραδείγματα προτάσεων που αποδεικνύονται «εύκολα»

- Άθροισμα αρτίων είναι άρτιος (πως?).
- Τετράγωνο αρτίου είναι άρτιος (και πολλαπλάσιο του τέσσερα), τετράγωνο περιττού είναι περιττός (πως?).
- Τετραγωνικοί αριθμοί («σχηματίζουν» τετράγωνο) n^2.
- Τριγωνικοί αριθμοί («σχηματίζουν» τρίγωνο).

Τετραγωνικός-Τριγωνικός αριθμός

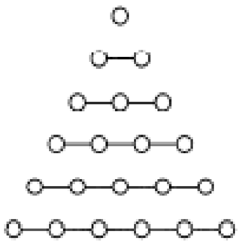


Το 25 είναι τετραγωνικός αριθμός,

25=1+3+5+7+9

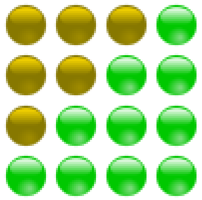
Ισχύει γενικά ότι

Τετραγωνικός= άθροισμα περιττών?



Το 21 είναι τριγωνικός αριθμός,

1+2+3+4+5+6=21=(6*7)/2



Ποιό θεώρημα αντιστοιχεί
στο παραπάνω σχήμα?

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**Chinese pythagoras**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chinese_pythagoras.jpg#mediaviewer/File:Chinese_pythagoras.jpg
- **Εικόνα 2:** "Greek Colonization Archaic Period" by Regaliorum - https://en.wikipedia.org/wiki/File:Greek_Colonization.png. Licensed under Creative Commons Zero, Public Domain Dedication via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Greek_Colonization_Archaic_Period.png#mediaviewer/File:Greek_Colonization_Archaic_Period.png

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

- **Εικόνα 3:** "Illustrerad Verldshistoria band I Ill 107" by Ernst Wallis et al - own scan. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Illustrerad_Verldshistoria_band_I_Ill_107.jpg#mediaviewer/File:Illustrerad_Verldshistoria_band_I_Ill_107.jpg
- **Εικόνα 4:** "Thales theorem 6" by Dake - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thales_theorem_6.png#mediaviewer/File:Thales_theorem_6.png
- **Εικόνα 5:** "Kapitolinischer **Pythagoras** adjusted" by Original uploader was Galilea at de.wikipedia - First upload to Wikipedia: de.wikipedia; description page is/was here.(Original text : Fotografiert am 30.03.2005) Second upload to Commons:

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Kapitolinischer_Pythagoras.jpg and this is an adjusted version of the second one. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg#mediaviewer/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα. Ενότητα 2.1: Τι είναι απόδειξη;». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.2: Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

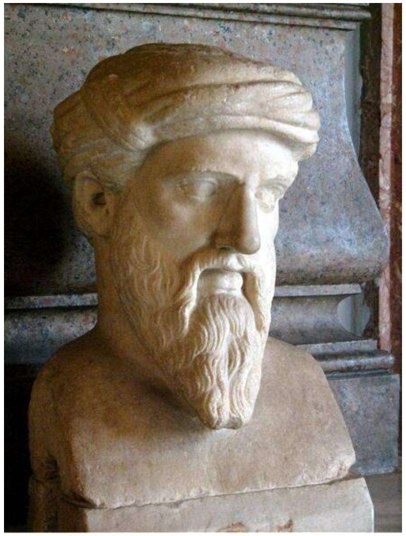
Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Πυθαγόρας (570-490) και οι Πυθαγόρειοι

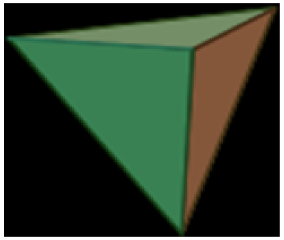


Εικόνα 1

Οι αριθμοί αποτελούν τη βάση του κόσμου.

«Το παν είναι αριθμός»

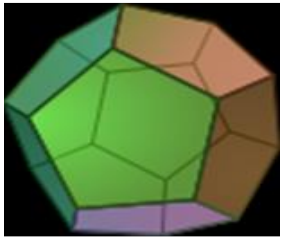
Πλατωνικά στερεά—Κανονικά Πολύεδρα (μνεία και Πυθαγόρα)



Τετράεδρο
{3,3}



Κύβος {4,3}

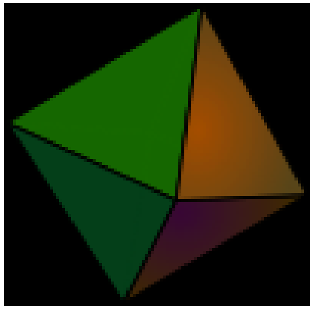


Δωδεκάεδρο, 12 έδρες, όλες κανονικά πεντάγωνα. Σε κάθε κορυφή συναντώνται ακριβώς 3 έδρες. {5,3}

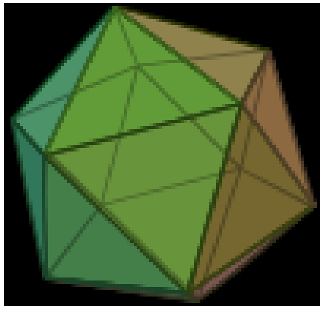
Υπάρχουν άλλα κανονικά Πολύεδρα?

Πλατωνικά στερεά—Κανονικά Πολύεδρα

Οκτάεδρο {3,4}



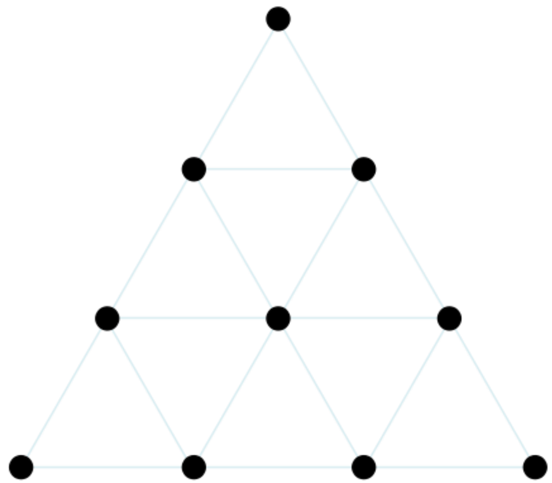
Εικοσάεδρο {3,5}



Δεν υπάρχουν άλλα πλατωνικά στερεά

(Ευκλείδης, «Στοιχεία», βιβλίο 13, Πρόταση 18 , Θεαίτητος)

τετρακτύς



Εικόνα 2

10: σύμπαν:

άθροισμα όλων των δυνατών γεωμετρικών διαστάσεων

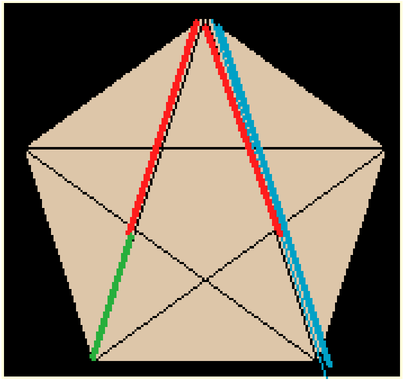
ένα σημείο: γεννήτωρ των διαστάσεων

δύο σημεία: ευθεία: διάσταση 1

τρία σημεία: τρίγωνο: διάσταση 2

τέσσερα σημεία: τετράεδρο: διάσταση 3

Χρυσή τομή (1)



α= διαγώνιος= γαλάζιο

x=το μεγαλύτερο τμήμα της τομής= κόκκινο

Ο λόγος $\varphi = \frac{a}{x}$ είναι η χρυσή τομή. Ισχύει

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

Χρυσή τομή (2)

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τιμή της χρυσής τομής από τη σχέση →

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

$$\varphi = \frac{a}{x} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$$

$$\Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Πως προκύπτει όμως ότι οι διαγώνιοι του κανονικού πενταγώνου τέμνονται με τέοιο τρόπο; (αποδείξτε το)

Κοινή μονάδα μέτρησης

Σύμφωνα με τη Πυθαγόρεια φιλοσοφία κάθε τι μπορεί να μετρηθεί … δύο ποσότητες a και b μπορούν πάντα να συγκριθούν: υπάρχει πάντα κοινή μονάδα μέτρησης.

Δηλαδή: Δοθέντος a και b υπάρχει c έτσι ώστε a και b να είναι ακέραια πολλαπλάσια του c.

Παράδειγμα: $\mathrm{a} = 3, b = 4$. Τότε 3=3 επί 1, 4=4 επί 1.

Σύγχρονη ερμηνεία: $a = mc, b = nc$ όπου m, n ακέραιοι

Άρα $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ είναι ρητός.

«Σόκ» η εύρεση των «άρρητων»

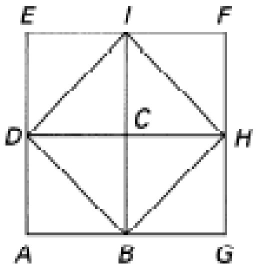
Μνεία στο έργο του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.) για γνώση που αποδίδεται στους Πυθαγόρειους:

«εάν η ακμή και η διαγώνιος του τετραγώνου είναι συγκρίσιμα μεγέθη με τη παραπάνω έννοια, δηλαδή αν ακμή και διαγώνιος είναι ακέραια πολλαπλάσια κάποιας κοινής μονάδας

τότε θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι οι περιττοί αριθμοί είναι ίσοι με τους άρτιους!»

Τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος

Η διαγώνιος BI και η ακμή BD του τετραγώνου DBHI δεν έχουν κοινή μονάδα μέτρησης.

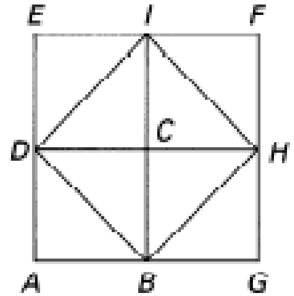


(αντιστοιχίζουμε στη διαγώνιο BI το mc, ενώ στο BD το nc. Παρακολουθούμε αλγεβρικά την απόδειξη.)

(m,n)=1

Έστω ότι BI, BD είναι ακέραια πολλαπλάσια μίας κοινής μονάδας c. Παίρνουμε c να είναι η **μεγαλύτερη** κοινή μονάδα σύγκρισης. Άρα τουλάχιστον ένα από τα BI, BD είναι περιττό πολλαπλάσιο αυτής της κοινής μονάδας.

Απόδειξη



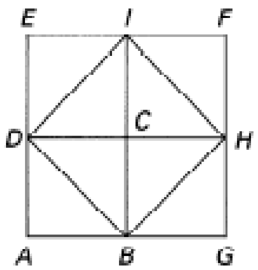
$\Rightarrow 2n^2 = m^2 \Rightarrow 2/m$

$\Rightarrow 2/n^2$

Το εμβαδόν του εξωτερικού τετραγώνου AGFE, δηλαδή AG τετράγωνο, είναι ίσο με δύο φορές το εμβαδόν του DBHI. Εμβαδόν AG τετράγωνο είναι άρτιος. Επομένως η ακμή AG του AGFE είναι και αυτή άρτιος.

Άρα το εμβαδόν του AGFE είναι πολλαπλάσιο του τέσσερα και επομένως το μισό του, δηλαδή το εμβαδόν του DBHI είναι άρτιος.

Απόδειξη … συνέχεια



$\Rightarrow 2/n$

Άτοπο, αφού (m,n)=1

Αφού DBHI είναι άρτιος και η ακμή του DB είναι άρτιος.

Αυτό είναι άτοπο:

Υποθέσαμε ότι ένα από τα BI , BD είναι περιττό, είδαμε προηγουμένως ότι AG είναι άρτιος, AG=BI και μόλις δείξαμε ότι DB είναι άρτιος!

Τα παράδοξα του Ζήνωνα (490- 430)

----προς υπεράσπιση του Παρμενίδη---οι ιδέες του απείρου και του συνεχούς

- **Διχοτόμηση**

Εάν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι απείρως διαιρετό τότε η κίνηση είναι αδύνατη: για να διανύσει ένας δρομέας ένα ευθύγραμμο τμήμα, πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του, πριν από αυτό, πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του μέσου και για να το κάνει αυτό πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του μέσου του μέσου, κ.ο.κ., επ' άπειρον. Ο δρομέας πρέπει να πλησιάσει μία άπειρη ομάδα σημείων μέσα σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Είναι όμως αδύνατο να εξαντλήσει μία άπειρη συλλογή και κατά συνέπεια η κίνηση είναι αδύνατη.

Ο Αχιλλέας και η χελώνα

Αν ο Αχιλλέας αφήσει μια χελώνα να ξεκινήσει από ένα σημείο που βρίσκεται πιο μπροστά απ’ αυτόν, τότε ο Αχιλλέας δεν θα φτάσει ποτέ την χελώνα: πρέπει πρώτα να φτάσει το σημείο απ' όπου ξεκίνησε η χελώνα. Μέχρι τότε όμως, η χελώνα θα έχει πάει σε ένα άλλο σημείο, πιο μπροστά. Ο Αχιλλέας τότε θα πρέπει να πάει σ’ αυτό το σημείο, αλλά πάλι η χελώνα θα έχει πάει πιο μπροστά.

Έτσι η χελώνα πάντα θα προπορεύεται.

Τα παράδοξα της διχοτόμησης και του Αχιλλέα δείχνουν ότι η κίνηση είναι αδύνατη αν δεχθούμε τις άπειρες υποδιαιρέσεις του χώρου και χρόνου.

Το Βέλος και το Στάδιο

(έστω ότι δεν υπάρχει άπειρη υποδιαίρεση του χώρου και του χρόνου)

Η περίοδος κατά την διάρκεια της οποίας ένα βέλος κινείται, συνίσταται από έναν αριθμό διαδοχικών χρονικών στιγμών. Σε κάθε μία από αυτές τις στιγμές, το βέλος είναι στη θέση πού είναι, και την επόμενη στιγμή είναι κάπου αλλού.

Πότε κινήθηκε;

Άρα το βέλος δεν μετακινείται και η κίνηση είναι μία οφθαλμαπάτη.

Μη συγκρισιμότητα --- ¨πρόβλημα¨ με τους άρρητους Παράδοξα του Ζήνωνα

Ο κόσμος των αριθμών (ότι «παράγεται» από τους φυσικούς) είχε την διακριτότητα.

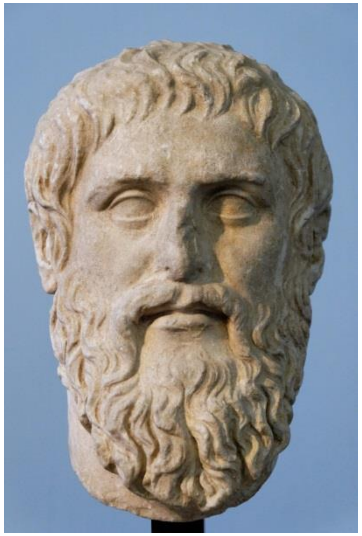
Για τα συνεχή μεγέθη ήταν αναγκαία η μελέτη με άλλες μεθόδους. Έτσι κυριάρχησε η γεωμετρία.

Πλάτων (427-347) Αθήνα

“Ουδείς αγεωμέτρητος εισί”

Ακαδημία (387 π.Χ. -529 μ.Χ.)

Αθήνα



Εικόνα 3

Έντονες πυθαγόρειες επιδράσεις.

Η Γεωμετρία και τα Μαθηματικά έχουν μια ξεχωριστή θέση.

Στον κόσμο των ιδεών τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν την τέλεια μορφή. Στον κόσμο των αισθήσεων τα αντικείμενα προσπαθούν να μοιάσουν την τέλεια μορφή τους.

Τι είναι λοιπόν απόδειξη?

«Θεός αεί γεωμετρείν»

(Απόσμασμα από τον Νόμο 747b , (Πλάτων))

¨Ουδέν ούτω δύναμιν έχει παίδειον μάθημα μεγάλην ως η περί τους αριθμούς διατριβή. Το δε μέγιστον ότι τον νυστάζοντα και αμαθή φύσει εγείρει και ευμαθή και αγχίνουν απεργάζεται.¨

¨Κανένα μάθημα δεν έχει τόσο μεγάλη παιδευτική δύναμη όσο η ενασχόληση με τους αριθμούς. Το πιο σημαντικό απ΄ όλα είναι ότι τον κοιμισμένο στο μυαλό, τον χωρίς κλίση για μάθηση τον διεγείρει και τον κάνει να μαθαίνει και του αυξάνει την αντιληπτική ικανότητα.¨

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "Kapitolinischer **Pythagoras**" by Original uploader was Galilea at de.wikipedia - Originally from de.wikipedia; description page is/was here.(Original text : Fotografiert am 30.03.2005). Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras.jpg#mediaviewer/File:Kapitolinischer_Pythagoras.jpg
- **Εικόνα 2:** http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tetractys.svg
- **Εικόνα 3:** "**Plato Silanion Musei Capitolini MC1377**" by English: Copy of Silanion - Marie-Lan Nguyen (User:Jastrow) 2009. Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plato_Silanion_Musei_Capitolini_MC1377.jpg#mediaviewer/File:Plato_Silanion_Musei_Capitolini_MC1377.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.3: Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

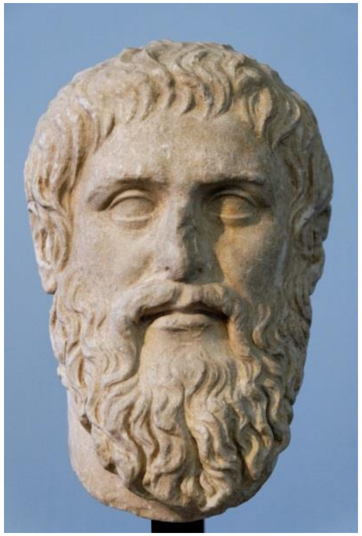
- Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Πλάτων (427-347) Αθήνα

“Ουδείς αγεωμέτρητος εισί”

Ακαδημία (387 π.Χ. -529 μ.Χ.)

Αθήνα



Εικόνα 1

Έντονες πυθαγόρειες επιδράσεις.

Η Γεωμετρία και τα Μαθηματικά έχουν μια ξεχωριστή θέση.

Στον κόσμο των ιδεών τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν την τέλεια μορφή. Στον κόσμο των αισθήσεων τα αντικείμενα προσπαθούν να μοιάσουν την τέλεια μορφή τους.

Τι είναι λοιπόν απόδειξη?

Δήλιο πρόβλημα

Ο χρησμός που δόθηκε στους Δηλίους κατά τη διάρκεια λοιμού, περίπου το 430 π.Χ. συμβούλευε να κατασκευάσουν ένα κυβικό βωμό διπλάσιου μεγέθους από αυτόν που ήδη υπήρχε.

Ερμηνεία του Πλάτωνα: οι θεοί θέλουν οι Έλληνες να ασχοληθούν περισσότερο με τη γεωμετρία και τα μαθηματικά.

Τα περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητας (1)

- Ο Διπλασιασμός του κύβου: να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη κύβος όγκου διπλασίου του όγκου δοθέντος κύβου.
- Ο Τετραγωνισμός του κύκλου: να κατασκευασθεί με κανόνα και διαβήτη τετράγωνο εμβαδού ίσου με το εμβαδόν δοθέντος κύκλου.
- Η τριχοτόμηση γωνίας: να χωριστεί με κανόνα και διαβήτη δοθείσα γωνία σε τρία ίσα μέρη.

Τα περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητας (2)

- Τα προβλήματα ήταν ευρέως γνωστά: γίνεται ήδη αναφορά από τον 5ο αιώνα π.Χ. σε θεατρικά έργα της εποχής (βλ. Ευριπίδη (485 π.Χ.-407 π.Χ), Αριστοφάνη (452-385 π.Χ.)
- Διπλασιασμός κύβου= «κατασκευή» της $\sqrt[3]{2}$.
- Τετραγωνισμός κύκλου= «κατασκευή» $\sqrt{\pi}$.
- Τριχοτόμηση γωνίας θ→ κατασκευή τμήματος μήκους cosθ.

Τα περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητας (3)

Οι Έλληνες βρήκαν λύσεις για αυτά προβλήματα που όμως χρησιμοποιούσαν και άλλα εγαλεία.

Για παράδειγμα:

- Εύδοξος ο Κνίδιος(408-355π.Χ.) χρησιμοποίησε μία πολυωνυμική καμπύλη τετάρτου βαθμού για τον διπλασιασμό του κύβου.
- Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) χρησιμοποίησε την έλικα για να τετραγωνίσει τον κύκλο.
- Ο Ιππίας ($4^{ος}$ αιώνας π.Χ.) για την τριχοτόμηση γωνίας χρησιμοποίησε μία μη αλγεβρική καμπύλη.

Ποιοι πραγματικοί είναι τελικά «κατασκευάσιμοι» με κανόνα και διαβήτη;

Η απάντηση βασίζεται στην άλγεβρα (!)

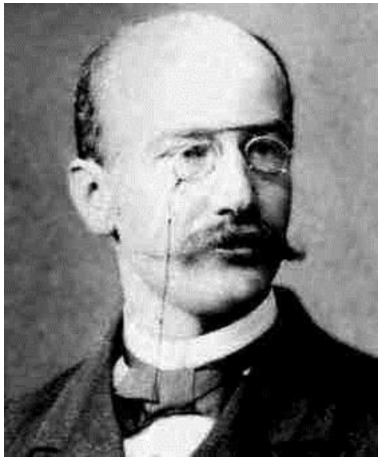
Για να είναι a κατασκευάσιμος, είναι αναγκαίο ο a να είναι αλγεβρικός, δηλαδή να είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου με συντελεστές στο Q. Και το ελαχίστου βαθμού πολυώνυμο που έχει τον a ως ρίζα πρέπει να έχει βαθμό κάποια δύναμη του 2.

Προβλήματα

- Διπλασιασμός του κύβου αδύνατον αφού το ελάχιστο πολυώνυμο της κυβικής ρίζας του 2 έχει βαθμό 3...
- Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατον αφού το π δεν είναι καν αλγεβρικός αριθμός.

Lindermann (1882)

- Η τριχοτόμηση της γωνίας δε μπορεί να γίνει για γωνία 60 μοιρών.



Εικόνα 2

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**Plato Silanion Musei Capitolini MC1377**" by English: Copy of Silanion - Marie-Lan Nguyen (User:Jastrow) 2009. Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plato_Silanion_Musei_Capitolini_MC1377.jpg#mediaviewer/File:Plato_Silanion_Musei_Capitolini_MC1377.jpg
- **Εικόνα 2:** "**Carl Louis Ferdinand von Lindemann**" by Unknown - http://www.math.uha.fr/Pi/trans.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Louis_Ferdinand_von_Lindemann.jpg#mediaviewer/File:Carl_Louis_Ferdinand_von_Lindemann.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.4: Εύδοξος, Τομές του Dedekind.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Εύδοξος από την Κνίδο (408-355)(1)

Εύδοξος από την Κνίδο (408-355) μαθηματικός, φιλόσοφος, αστρονόμος, γεωγράφος.

Πριν: Σύμφωνα με την πυθαγόρεια αντιμετώπιση η διαγώνιος και η ακμή τετραγώνου δεν είναι συγκρίσιμα.

Ορισμός Ευδόξου:

Δύο μεγέθη είναι συγκρίσιμα και σχηματίζουν λόγο όταν (ακέραιο) πολλαπλάσιο του ενός ξεπερνά το άλλο, («Στοιχεία» του Ευκλείδη, Βιβλίο 5, ορισμός 4).

Εύδοξος από την Κνίδο (408-355)(2)

Παράδειγμα:

1. μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος και το εμβαδόν ενός σχήματος δεν συγκρίνονται μεταξύ τους.
2. Η διαγώνιος και η ακμή του τετραγώνου σχηματίζουν λόγο.

Θα συμβολίσουμε τον λόγο ανάμεσα στα a και b με $a\!:b$.

Πότε είναι δύο λόγοι ίσοι? Πότε είναι δύο λόγοι άνισοι? (τι είδους ποσότητες είναι οι λόγοι?)

Παρόλο που διαφορετικού «τύπου» μεγέθη δε σχηματίζουν λόγο, μπορούμε να συγκρίνουμε λόγους, (ακόμα και αν αυτοί προέρχονται από διαφορετικού τύπου μεγέθη).

Εύδοξος από την Κνίδο(3)

Για να είναι $a:b = c:d$ θα πρέπει για κάθε ζευγάρι (m,n) ακεραίων θα πρέπει να ισχύει

1. αν $ma < nb$ τότε $mc < nd.$
2. αν $ma = nb$ τότε $mc = nd.$
3. αν $ma > nb$ τότε $mc > nd.$

Προκύπτει ότι:

Αν $a:b > c:d$ τοτε για $e < a$ ισχυει $ότι$ $e:b = c:d.$

(Σήμερα θα λέγαμε: $a:b = c:d$ αν και μόνο αν $ad = bc$)

Είναι οι δύο ορισμοί ισοδύναμοι?
Γιατί δεν όρισε έτσι ο Εύδοξος την ισότητα των λόγων?
Τι προυποθέτει ο σύγχρονος ορισμός?)

Παράδειγμα 1 με τον ορισμό του Ευδόξου

Ισχύει ότι $3:6 = 4:8$.

- αν (m, n) έτσι ώστε $m3 < n6$ τότε $m < 2n$ και $m4 < n8$.
- αν (m, n) έτσι ώστε $m3 = n6$ τότε $m = 2n$ και $m4 = n8$.
- αν (m, n) έτσι ώστε $m3 > n6$ τότε $m > 2n$ και $m4 > n8$.

Παράδειγμα 2

Πρόταση :

Έστω κύκλοι c και C, με διαμέτρους d και D, εμβαδά a και A.

Τότε

$$\mathbf{a}: \boldsymbol{A} = \boldsymbol{d}^{\mathbf{2}}: \boldsymbol{D}^{\mathbf{2}}$$

(θα δώσουμε σκίτσο απόδειξης της Πρότασης, για τη πλήρη απόδειξη, βλ. Ευκλείδη, βιβλίο 12.)

Λήμμα (Εύδοξος) (1)

- **Λήμμα (Εύδοξος):** Αν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε ένα τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του, και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε πάλι τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του και αν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία των αφαιρέσεων, θα καταλήξουμε σε μέγεθος μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους.

Το Λήμμα αποδίδεται και αυτό στον Εύδοξο και είναι η Πρόταση 1 στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, βιβλίο 10. (δηλ. δίνεται με απόδειξη!)

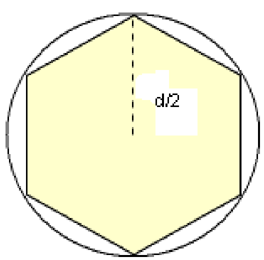
Λήμμα (Εύδοξος) (2)

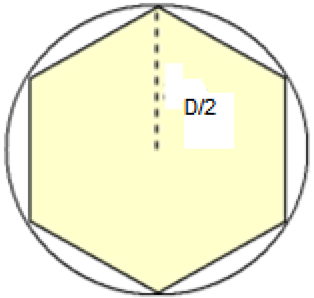
Πρώτα δείχνουμε ότι ισχύει αντίστοιχο θεώρημα για τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται στους κύκλους.

Προκαταρτική Πρόταση: Έστω δύο κανονικά πολύγωνα με n ακμές , εγγεγραμμένα σε δύο κύκλους με ακτίνα d και D και με εμβαδά p_n και P_n.

Τότε

$$d^2 : D^2 = p_n : P_n.$$

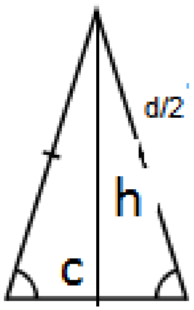




Προκαταρτική Πρόταση

Πράγματι, το εμβαδό t του Ισοσκελούς

Τριγώνου της εικόνας είναι



$$t = c\sqrt{\frac{d^2}{4} - c^2} = \frac{cd}{2}\sqrt{1 - 4\frac{c^2}{d^2}}$$

Έτσι αν έχουμε δύο όμοια ισοσκελή τρίγωνα με πλευρές $d/2$ και $D/2$ και βάσεις $2c$ και $2C$ αντίστοιχα,

έπεται ότι

$$\frac{c}{d} = \frac{C}{D}$$

Προκαταρτική Πρόταση συνέχεια

και άρα για τα εμβαδά τους t και T έχουμε τη σχέση

$$\frac{t}{T} = \frac{d^2}{D^2}$$

Τα κανονικά πολύγωνα που συγκρίνουμε είναι αθροίσματα τέτοιων τριγώνων.

Άρα ισχύει και ο ζητούμενος λόγος για τα εμβαδά τους.

Πρόταση για τους κύκλους (1)

Πίσω στην Πρόταση για τους κύκλους: Έστω κύκλοι c και C, με διαμέτρους d και D, εμβαδά a και A. Τότε

$$\mathbf{a}:\mathbf{A}=\mathbf{d^2}:\mathbf{D^2}$$

Για τον λόγο $a:A$έχουμε τρείς περιπτώσεις

1. $a:A=d^2:D^2$
2. $a:A<d^2:D^2$
3. $a:A>d^2:D^2$

Θα αποκλείσουμε τις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

Πρόταση για τους κύκλους (2)

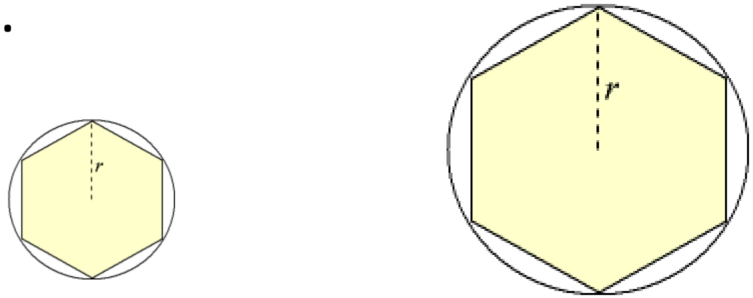
Έστω ότι

$$a{:}\,A > d^2{:}\,D^2.$$

Τότε υπάρχει a' έτσι ώστε

$$a' < a,\ a'{:}\,A = d^2{:}\,D^2$$

Θέτουμε $e = a - a'$. Εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα στους δύο κύκλους.



Πρόταση για τους κύκλους (3)

Διπλασιάζουμε ταυτόχρονα στους δύο κύκλους τις πλευρές των πολυγώνων .Κάθε φορά που διπλασιάζουμε τον αριθμό των πλευρών, το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στο κύκλο και στο πολύγωνο μικραίνει.
Κάποια στιγμή σύμφωνα με το πρώτο Λήμμα, όταν ο αριθμός ακμών n είναι αρκετά μεγάλος θα ισχύει ότι

$$a - p_n < e \Rightarrow a - p_n < a - a' \Rightarrow p_n > a'$$

Όμως

$$p_n : P_n = d^2 : D^2 = a' : A$$

Άρα

$$P_n > A \qquad \text{Άτοπο!}$$

Πρόταση για τους κύκλους (4)

Η άλλη περίπτωση

$$a : A < d^2 : D^2$$

γίνεται με τον ίδιο τρόπο (άσκηση).

Να ελεγχθεί επίσης ότι το εμβαδόν ανάμεσα στον κύκλο και το πολύγωνο μικραίνει τουλάχιστον κατά το ½ για να εφαρμοστεί το Λήμμα του Ευδόξου.

Τελικά τι είναι οι πραγματικοί αριθμοί;

Τελικά τι είναι οι πραγματικοί αριθμοί?

Τι ακριβώς είναι οι άρρητοι?

Ο ορισμός των λόγων του Ευδόξου ενέπνευσε τον Dedekind στην προσπάθεια της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών.

Πως ορίζονται αξιωματικά από το σύστημα των ρητών αριθμών οι πραγματικοί αριθμοί?

Είναι το ρίζα 2 «όμοιο» με το π?

Πως ορίζονται αξιωματικά από το σύστημα των ρητών αριθμών οι πραγματικοί αριθμοί?

Τομές του Dedekind (1831-1916) στους ρητούς: δημιουργία των άρρητων (αξιωματική θεμελίωση)



Εικόνα 1

Τομές του Dedekind (1)

Ξεκινάμε από το σύνολο των ρητών (στον κόσμο μας δεν υπάρχουν οι άρρητοι) και φτιάχνουμε **<u>τομές</u>** δηλαδή διαμερίσεις του Q σε σύνολα A και B με κάποιες ιδιότητες που θα δούμε παρακάτω:

Για παράδειγμα, η τομή που θα αντιστοιχεί στην τετραγωνική ρίζα του 2 είναι η παρακάτω διαμέριση του Q:

$$\mathrm{A} = \{x \in Q : x^2 < 2\} \cup \{x \in Q : x \leq 0\}, B = Q/A$$

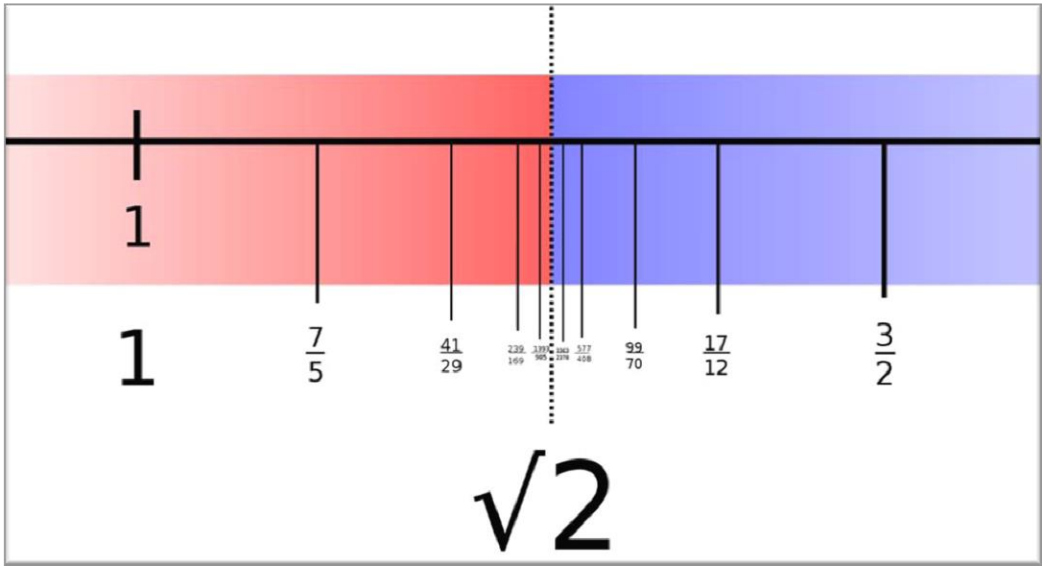
<u>Ιδιότητες</u>:

- το σύνολο A δεν έχει μέγιστο στοιχείο ενώ αν x είναι στο A και y είναι μικρότερο του x τότε y ανήκει στο A.
- Όλα τα στοιχεία του B είναι μεγαλύτερα αυτών του A

Τομές του Dedekind (2)

Θεωρούμε το σύνολο των τομών του Q.
Έστω (A,B) μία τέτοια τομή.
Αν το σύνολο B έχει ελάχιστο (στους ρητούς) τότε η τομή αντιστοιχεί σε αυτόν τον ρητό. (Το σύνολο λοιπόν των ρητών μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο των τομών). Αν όμως το B δεν έχει ελάχιστο στους ρητούς, τότε η τομή είναι κάτι καινούργιο: ένας άρρητος. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα το σύνολο B δεν είχε ελάχιστο στους ρητούς και ονομάζουμε την αντίστοιχη τομή τετραγωνική ρίζα του 2.
Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να θεμελιωθούν ως τέτοιες τομές με κατάλληλα ορισμένες πράξεις.

Dedekind



Κόκκινο $\mathrm{A} = \{x \in Q : x^2 < 2\} \cup \{x \in Q : x \leq 0\}$

Μπλε $B = Q/A$

Ποια είναι η σχέση όμως με τον Εύδοξο?

Θα το δείξουμε για τη $\sqrt{2}$:

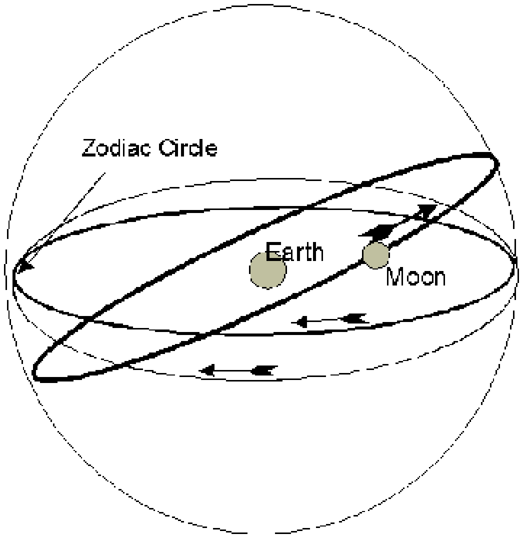
Σύμφωνα με τη θεωρία των λόγων του Ευδόξου, χωρίζουμε τις δυάδες (m, n) του $N \times N$ (αντιστοιχία με ρητούς) σε δύο σύνολα. Τα σύνολα αυτά δίνουν και διαμέριση (τομή (!)) των ρητών:

Ένα σύνολο Α αν $\sqrt{2}m \leq n1$ δηλαδή αν $\frac{\sqrt{2}}{1} \leq \frac{n}{m}$

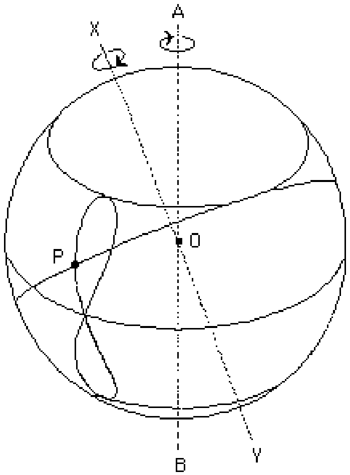
και ένα σύνολο Β αν $\sqrt{2}m > n1$ δηλαδή αν $\frac{\sqrt{2}}{1} > \frac{n}{m}$.

Εύδοξος και οι πλανήτες (Μεταφυσική του Αριστοτέλη)

Μοντέλο για τη σελήνη



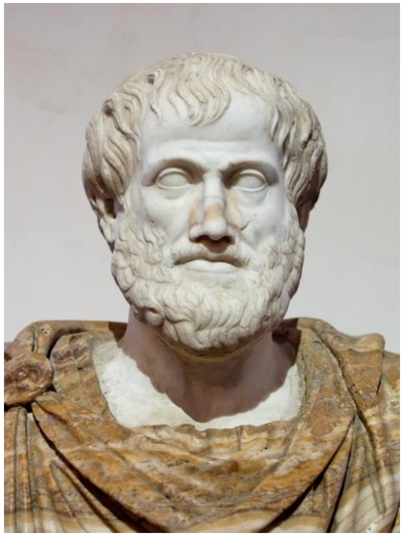
Καμπύλη ιπποπέδης



Σφαίρες που ο άξονας της μίας είναι η διάμετρος της άλλης. Όταν περιστρέφεται η μία, περιστρέφεται και ο άξονας της άλλης.

Αριστοτέλης **384 π.Χ. - 322 π.Χ.**

Η αριστοτέλεια μεθοδολογία (ταξινόμηση, παρατήρηση, ανάλυση) θα υιοθετηθεί απ’ τον Ευρωπαϊκό Διαφωτισμό.



Εικόνα 2

Ο Αριστοτέλης ήταν κυρίως φιλόσοφος και βιολόγος.

Η μεγάλη συνεισφορά του στην εξέλιξη των μαθηματικών είναι οι βάσεις της λογικής που έθεσε και οι συνεχείς αναφορές σε μαθηματικές έννοιες και θεωρήματα.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**Dedekind**" by not found -http://dbeveridge.web.wesleyan.edu/wescourses/2001f/chem160/01/Photo_Gallery_Science/Dedekind/FrameSet.htm. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dedekind.jpeg#mediaviewer/File:Dedekind.jpeg
- **Εικόνα 2:** "**Aristotle Altemps Inv8575**" by Copy of Lysippus - Jastrow (2006). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aristotle_Altemps_Inv8575.jpg#mediaviewer/File:Aristotle_Altemps_Inv8575.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.5: Ευκλείδης και τα Στοιχεία.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Ευκλείδης (~325 – 265 π.Χ.), (Αλεξάνδρεια)



Εικόνα 1

Έργα

Στοιχεία
Δεδομένα
Φαινόμενα ή Σφαιρικά
Οπτικά
Κατοπτρικά
Στοιχεία Μουσικής
Βιβλίο περί διαιρέσεων
Πορίσματα
Κωνικά
Τόποι προς επιφάνειες
Ψευδάρια
Μηχανική
Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων

Στοιχεία βιβλίο 2, πρόταση 5



Εικόνα 2
(100 μ.Χ. Ὀξύρρυγχος)

Ραφαήλ (1483-1520)



Εικόνα 3

«Η σχολή των Αθηνών» (~1510)

Έργα του Ευκλείδη



Εικόνα 4

Έργα

Στοιχεία
Δεδομένα
Φαινόμενα ή Σφαιρικά
Οπτικά
Κατοπτρικά
Στοιχεία Μουσικής
Βιβλίο περί διαιρέσεων
Πορίσματα
Κωνικά
Τόποι προς επιφάνειες
Ψευδάρια
Μηχανική
Περί βαρέων και ελαφρών σωμάτων

Στοιχεία του Ευκλείδη («εισαγωγή στα μαθηματικά»)

Συλλογή από 13 βιβλία-κεφάλαια:

Παρουσιάζονται με λογική σειρά οι βάσεις για τα στοιχειώδη μαθηματικά της εποχής:

- Οι βάσεις για την αριθμητική (θεωρία αριθμών).
- Για την γεωμετρία (σημεία, ευθείες, επίπεδα, κύκλοι, σφαίρες).
- για την γεωμετρική άλγεβρα.

Το περιεχόμενο των Στοιχείων του Ευκλείδη στηρίχτηκε κατά ένα μεγάλο μέρος στο έργο προηγούμενων μαθηματικών.

Όμως η διάταξη (σειρά) των προτάσεων (φαίνεται να) οφείλεται στον Ευκλείδη όπως και πολλές από τις αποδείξεις.

Ύπαρξη άλλων «Στοιχείων»

Ο Ιπποκράτης της Χίου (~470 π.Χ-410 π.Χ.) είχε γράψει και αυτός (νωρίτερα) «Στοιχεία», όπως και άλλοι μαθηματικοί.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ξεχώρισαν από τις παλαιότερες εργασίες χάρις στη λογική δομή και μαθηματική αυστηρότητά τους. Έτσι τα παλαιότερα δεν αναπαράχθηκαν και σώζονται μόνο μέσα από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

«Στοιχεία»

- Τα βιβλία 1-6 αναφέρονται στη στοιχειώδη γεωμετρία του επιπέδου.
- Τα βιβλία 7-9 αναφέρονται στη θεωρία των αριθμών.
- Το βιβλίο 10 αναφέρεται στους άρρητους.
- Τα βιβλία 11-13 αναφέρονται στη στερεομετρία.

13 βιβλία των Στοιχείων

Κάποια από τα Μαθηματικά αποτελέσματα που περιέχονται στα 13 βιβλία των Στοιχείων αποδίδονται σε μαθηματικούς που έζησαν πριν τον Ευκλείδη.

- Στους Πυθαγόρειους και κυρίως στον Αρχύτα

τον Ταραντίνο (428 - 347 π.Χ.) «περιστερά»

βιβλία 1,2,6,7,8,9,11.



Εικόνα 5

- Εύδοξος από την Κνίδο (408-355 π.Χ.) βιβλία 5, 12.
- Θεαίτητος ο Αθηναίος(417-369 π.Χ.) βιβλία 10,13.

Βιβλίο 1 έως 3

- Βιβλίο 1: αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας με 23 ορισμούς, 5 αιτήματα και 9 κοινές έννοιες, (δηλαδή τα αιτήματα και κοινές έννοιες αποτελούν αυτά που σήμερα θα λέγαμε στα αξιώματα). Ακολουθούν οι προτάσεις. Το βιβλίο τελειώνει με την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του αντιστρόφου του.
- Βιβλίο 2: Θεωρήματα της Γεωμετρικής Άλγεβρας (αποδείξεις αλγεβρικών ταυτοτήτων όπως $a(b+c)=ab+ac$ με χρήση εμβαδών).
- Βιβλίο 3: Ιδιότητες κύκλων.

Βιβλίο 4 έως 9

- Βιβλίο 4: Κατασκευές (με κανόνα και διαβήτη) κανονικών πολυγώνων, (3,4,5,6 πλευρές). Τελειώνει με τη κατασκευή του κανονικού 15-γωνου.
- Βιβλία 5 και 6: θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου και προτάσεις Γεωμετρικής Άλγεβρας και ομοιότητα τριγώνων.
- Βιβλία 7,8,9: Θεωρία Αριθμών.

Βιβλίο 10 έως 13

- Βιβλίο 10: (το μεγαλύτερο και το δυσκολότερο). Με τη σημερινή ορολογία: επεκτάσεις σωμάτων βαθμού 2 και 4 πάνω από τους ρητούς, (θέμα παρουσίασης).
- Βιβλίο 11: Βασικά Θεωρήματα στερεομετρίας.
- Βιβλίο 12: όγκους πυραμίδας, κώνου και σφαίρας.
- Βιβλίο 13: πλατωνικά στερεά. Για κάθε ένα από αυτά υπολογίζει λόγο ακμής με ακτίνα περιγεγραμμένης σφαίρας.

Παρατήρηση για τα κατασκευάσιμα κανονικά πολύγωνα

Το επόμενο κανονικό πολύγωνο μετά τον Ευκλείδη κατασκευάσθηκε το 1796 από τον Gauss (1777-1855): το κανονικό 17-γωνο .

Υπάρχουν άλλα κατασκευάσιμα πολύγωνα?

(Θέμα παρουσίασης)



Εικόνα 6

Αἰτήματα (Βιβλίο 1) (1)

- α΄. Αιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
- δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- ε΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

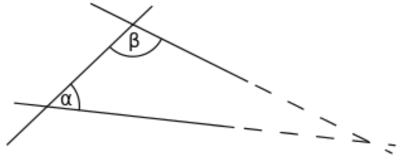
Αίτημα 4, Αίτημα 5

Ορισμός 10 (ορθών γωνιών): όταν μία ευθεία τέμνει μία άλλη έτσι ώστε οι εφεξής γωνίες να είναι ίσες, τότε οι γωνίες αυτές λέγονται ορθές και οι ευθείες κάθετες η μία προς την άλλη.

Αίτημα 4: όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες η μία προς την άλλη

Αίτημα 5: Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που είναι αυτές οι γωνίες.

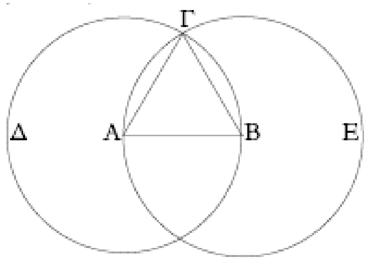
Εικόνα 7



Πρόταση 1, βιβλίο 1

Επί της δοθείσης ευθείας πεπερασμένης τρίγωνον ισόπλευρον συστήσασθαι.

Πρόταση 1, βιβλίο 1 →



Έστω η δοθείσα ευθεία πεπερασμένη η ΑΒ.
Δει δη επί της ΑΒ ….

Πρόταση 1 Με πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο

Δίνεται το ΑΒ

Κατασκευή

- κύκλου με κέντρο το Α.
- κύκλου με κέντρο το Β.

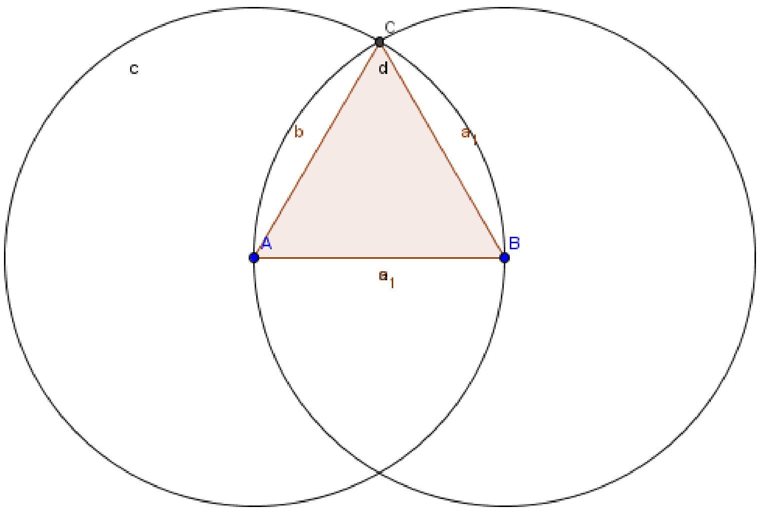
(ακτίνα ΑΒ)

Έστω C το σημείο τομής.

ABC είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

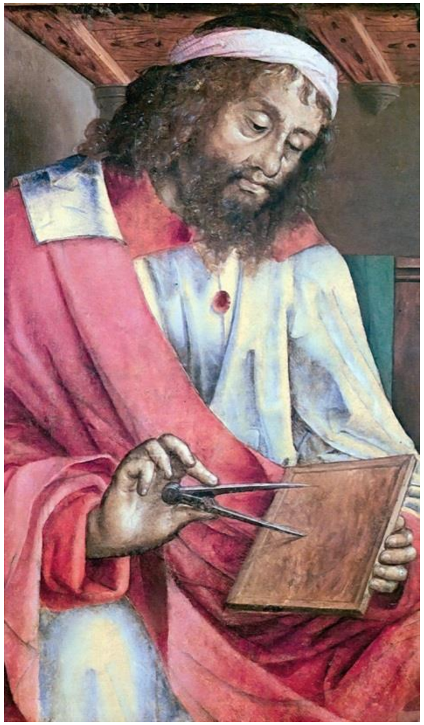
Χρησιμοποιεί:

1. Αίτημα 3 (κατασκευή κύκλου).
2. Αίτημα 1 (κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος).
3. Κοινή έννοια 1 (ίσα προς τρίτο και μεταξύ τους ίσα).



Εικόνα 8

Ευκλείδης (~325 – 265 π.Χ.), (Αλεξάνδρεια)



Εικόνα 9

Έργα

Στοιχεία

Στοιχεία

- Βιβλίο 1: αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας του επιπέδου. (ξεκινά με 23 ορισμούς, 5 αιτήματα και 9 κοινές έννοιες,).
- Βιβλίο 2: Θεωρήματα της Γεωμετρικής Άλγεβρας.
- Βιβλίο 3: Ιδιότητες κύκλων.
- Βιβλίο 4: Κατασκευές κανονικών πολυγώνων.
- Βιβλία 5 και 6: θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου.
- Βιβλία 7,8,9: Θεωρία Αριθμών.
- Βιβλίο 10: επεκτάσεις πάνω από τους ρητούς.
- Βιβλίο 11: Βασικά Θεωρήματα στερεομετρίας.
- Βιβλίο 12: όγκους πυραμίδας, κώνου και σφαίρας.
- Βιβλίο 13: πλατωνικά στερεά.

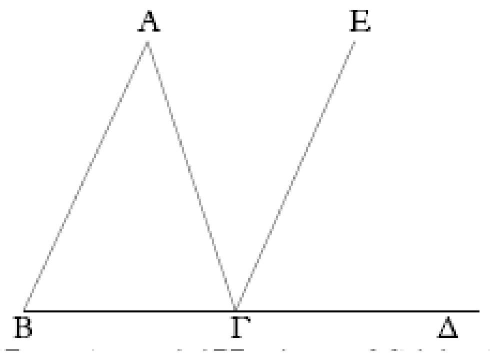
Αἰτήματα (Βιβλίο 1) (2)

- α΄. Αιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
- δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- ε΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Πρόταση 32, βιβλίο 1

Παντός τριγώνου μιας των πλευρών προσεκβληθείσης

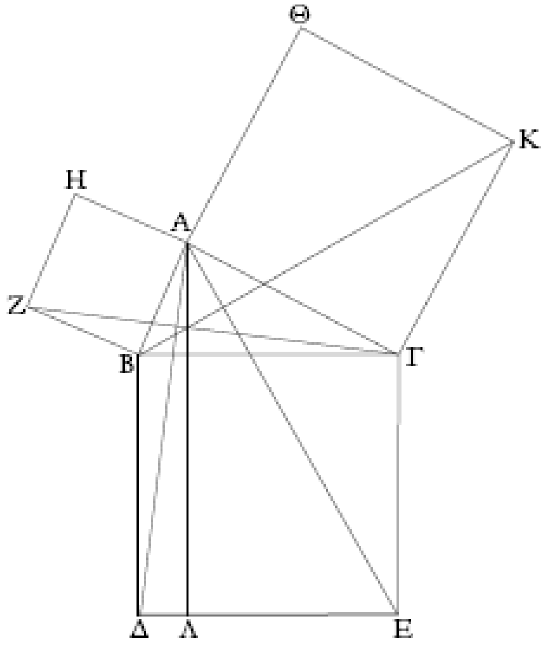
η εκτός γωνία δυσί τοις εντός και απεναντίον ίση εστίν, και αι εντός του τριγώνου τρεις γωνίαι δυσίν ορθαίς ίσαι εισίν.



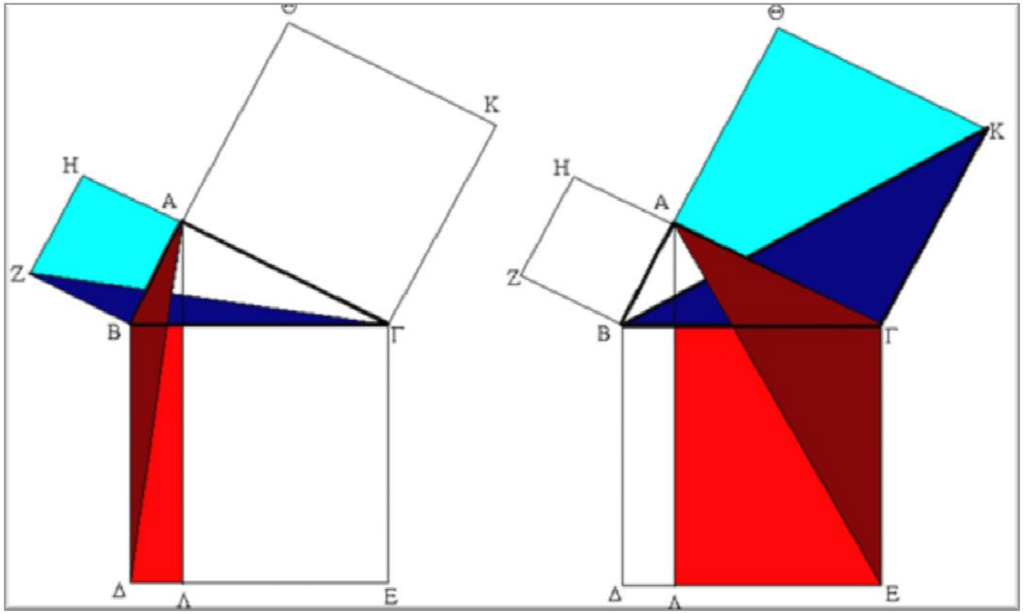
- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Πρόταση 47, (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις.



Πυθαγόρειο Θεώρημα

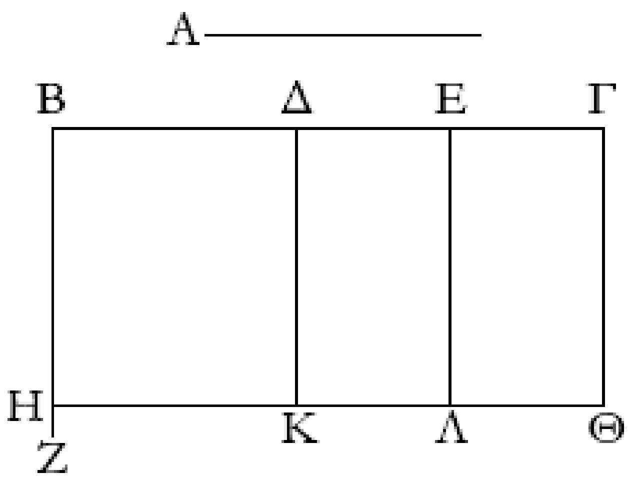


Στο παραπάνω σχήμα: ΑΒΔ=ΒΓΖ, ΑΒΔ=1/2 κόκκινου ΒΔΛΜ, ΒΓΖ=1/2 ΒΖΗΑ.

Άρα ΒΖΗΑ=κόκκινο ΒΔΛΜ. ↙

ΑΓΚΘ=κόκκινο ΛΜΓΕ →ΒΖΗΑ+ΑΓΚΘ=ΒΓΕΔ

Γεωμετρική Άλγεβρα



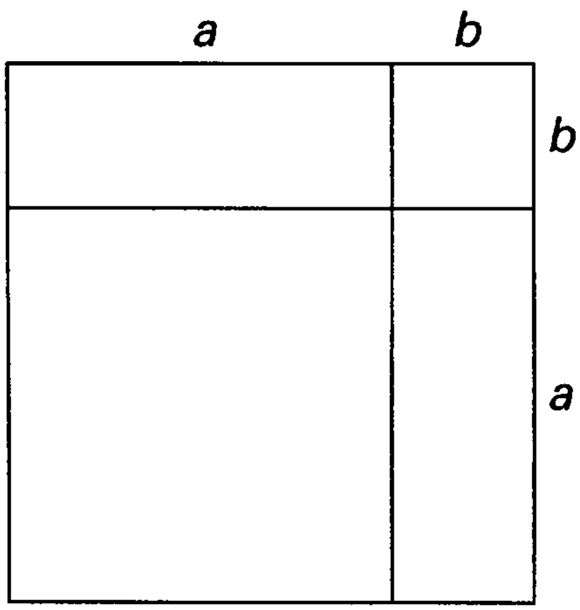
Βιβλίο 2

$$a(b+c+d+\cdots) \\ = ab+ac+ad+\cdots$$

(γενικευμένο παράδειγμα)

$$a(b+c+d) \\ = ab+ac+ad$$

Πρόταση 4, βιβλίο 2, Στοιχεία



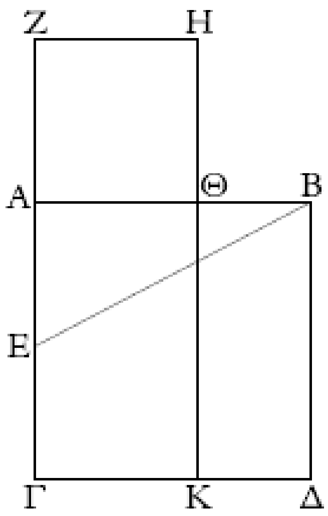
Πρόταση 4, βιβλίο 2, Στοιχεία:

Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από σημείο σε δύο τμήματα, το τετράγωνο του όλου τμήματος είναι ίσο με τα τετράγωνα των δύο τμημάτων και το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Βιβλίο 2

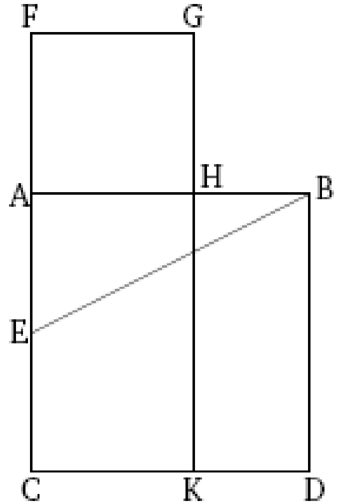
- Την δοθείσαν ευθείαν τεμείν ώστε το υπό της όλης και του ετέρου των τμημάτων περιεχόμενον ορθογώνιον ίσον είναι τω από του λοιπού τμήματος τετραγώνω.



Πρόταση 11, βιβλίο 2, Στοιχεία

Να διαιρεθεί δοθέν τμήμα ώστε το ορθογώνιο που ορίζει το τμήμα και το ένα μέρος του να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το άλλο μέρος.

$$a(a-x) = x^2$$



Ερμηνεία:

τμήμα =AB=α,

ABDC τετράγωνο,

χωρίζουμε AB σε AH και HB.

θέλουμε το x=AH να είναι τέτοιο ώστε HBDK =HGFA.

Λύση:

Έστω E το μισό του AC,

EF=EB

AFGH τετράγωνο

τότε AH=x

Η προηγούμενη Πρόταση

Η προηγούμενη Πρόταση δίνει

- Τη γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
- Ποια είναι η κατηγορία εξισώσεων δευτέρου βαθμού που μπορούν να επιλυθούν γεωμετρικά σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο?
- Υπάρχουν άλλα τέτοια παραδείγματα στα Στοιχεία του Ευκλείδη?

Βιβλίο 7, Βιβλίο 9

Βιβλίο 7 Θεωρία Αριθμών

Όροι

α’ Μονάς εστίν, καθ’ην έκαστον των όντων εν λέγεται.

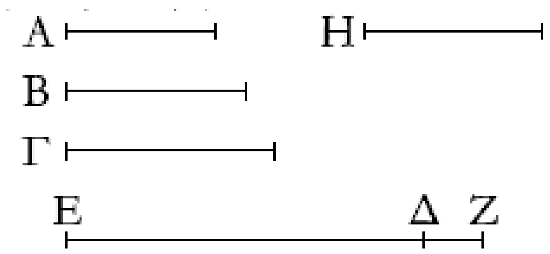
β’. Αριθμός δε το εκ μονάδων συγκείμενον πλήθος.

…..

Βιβλίο 9

κ’.

Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός του προτεθέντος πλήθους πρώτων αριθμών.



Υπάρχει άπειρος αριθμός πρώτων, Βιβλίο 9, πρ. 20

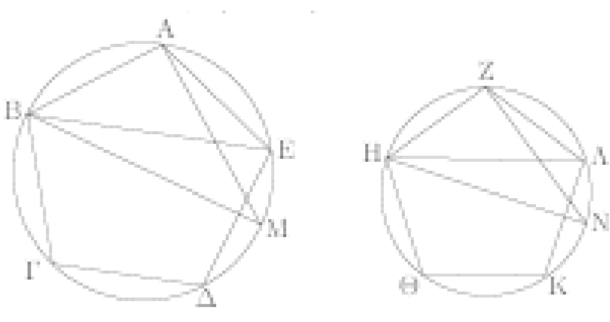
«Αν δοθεί οποιοδήποτε πλήθος πρώτων αριθμών τότε υπάρχουν πάντα περισσότεροι από αυτό το πλήθος»

- Ορισμός 12: πρώτος λέγεται ο αριθμός που μετριέται μόνο από τη μονάδα.
- Απόδειξη με γενικευμένο παράδειγμα (δίνονται 3 πρώτοι και αποδεικνύεται ότι υπάρχει τέταρτος) και με εις άτοπον απαγωγή.

Βιβλίο 12

α΄.

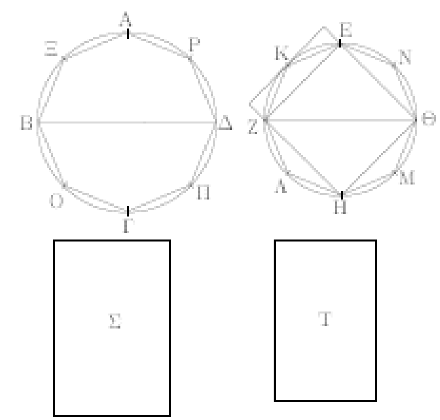
Τα εν τοις κύκλοις όμοια πολύγωνα προς αλληλά εστίν ως τά από των διαμέτρων τετράγωνα.



β΄.

Οι κύκλοι προς αλλήλους εισίν ως τα από των διαμέτρων τετράγωνα

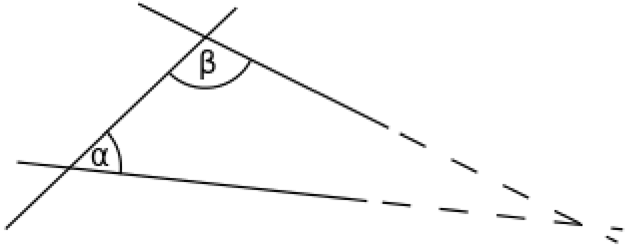
$$a : A = d^2 : D^2$$



Αίτημα 5

- Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που είναι αυτές οι γωνίες.

Τι είναι ευθεία?



Το **5ο αίτημα** είναι ισοδύναμο με τα εξής:

Μήπως στη πραγματικότητα το 5ο αίτημα προκύπτει από τα άλλα 4 αιτήματα και μπορεί να παραληφθεί?

Το **5ο αίτημα** είναι ισοδύναμο με τα εξής:

- **στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος, (μία ευθεία που δεν τέμνει την αρχική).**
- **οι γωνίες σε ένα τρίγωνο έχουν άθροισμα δύο ορθές γωνίες.**
- (και πολλές άλλες προτάσεις που αφορούν παράλληλες ευθείες).

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**EuclidStatueOxford**" by Photograph taken by Mark A. Wilson (Wilson44691, Department of Geology, The College of Wooster). [1] - Own work.
- **Εικόνα 2:** "P. Oxy. I 29" by Euclid - http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/tha.jpg. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:P._Oxy._I_29.jpg#mediaviewer/File:P._Oxy._I_29.jpg
- **Εικόνα 3:** "**Sanzio 01**" by Raphael - Stitched together from vatican.va. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sanzio_01.jpg#mediaviewer/File:Sanzio_01.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

- **Εικόνα 4:** "**Sanzio 01 Euclid**" by Raphael-This file is lacking source information. Please edit this file's description and provide a source.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sanzio_01_Euclid.jpg#mediaviewer/File:Sanzio_01_Euclid.jpg
- **Εικόνα 5:** "**Archytas**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/

  File:Archytas.jpg#mediaviewer/File:Archytas.jpg
- **Εικόνα 6:** "Stamps of Germany (DDR) 1977, MiNr 2215" by Hochgeladen von --Nightflyer (talk) 18:24, 21 November 2009 (UTC) - Eigener Scan und Bearbeitung. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stamps_of_Germany_(DDR)_1977,_MiNr_2215.jpg#mediaviewer/File:Stamps_of_Germany_(DDR)_1977,_MiNr_2215.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

- **Εικόνα 7:** "**Parallel postulate** en" by 6054 - Edit of http://pl.wikipedia.org/wiki/Grafika:
  Parallel_postulate.svg by User:Harkonnen2. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel_postulate_en.svg#mediaviewer/File:Parallel_postulate_en.svg
- **Εικόνα 8:** "**Euclid I°t1**" by Fracqua - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:
  Euclid_I%C2%B0t1.png#mediaviewer/File:Euclid_I%C2%B0t1.png
- **Εικόνα 9:** "**Euklid**" by Justus van Gent (fl. 1460–1480) - http://www.aiwaz.net/panopticon/euclid/gi881c129. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euklid.jpg#mediaviewer/File:Euklid.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.6: Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Πίσω στο βιβλίο 1 και στα αιτήματα

Είναι το 5ο αίτημα όντως αίτημα και όχι πρόταση ?

Η πρώτη φορά που το αίτημα χρησιμοποιείται στα Στοιχεία είναι στην απόδειξη της Πρότασης 28.

(Η Πρόταση 28 λέει όταν ευθεία τέμνει δύο παράλληλες τότε η εξωτερική και εσωτερική γωνία επί τα αυτά είναι ίσες.)

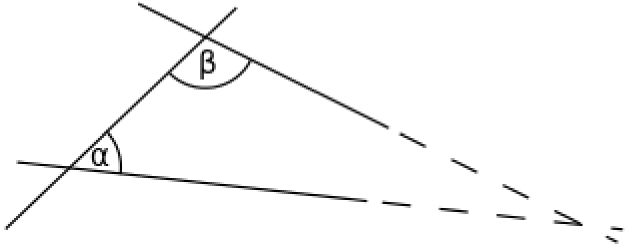
Αιτήματα (Βιβλίο 1)

- α΄. Μπορούμε να ενώσουμε με ευθύγραμμο τμήμα οποιαδήποτε δύο σημεία.
- β΄. Μπορούμε να επεκτείνουμε ευθύγραμμο τμήμα.
- γ΄. Μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο με δοθέν κέντρο και δοθείσα ακτίνα.
- δ΄. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
- ε΄. Εάν ευθεία τέμνει άλλες δύο κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι «εσωτερικές» γωνίες να δίνουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών τότε οι ευθείες τέμνονται προς αυτή τη κατεύθυνση.

Αίτημα 5

- Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που είναι αυτές οι γωνίες.

Τι είναι ευθεία?



Το 5ο αίτημα

- το **5ο αίτημα** είναι ισοδύναμο με τα εξής:

Στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος, (αξίωμα του Playfair (Πρόκλος)).

Οι γωνίες σε ένα τρίγωνο έχουν άθροισμα δύο ορθές γωνίες.

(και πολλές άλλες προτάσεις που αφορούν παράλληλες ευθείες).

Πρόταση

Από σημείο εκτός ευθείας μπορεί να κατασκευαστεί (μοναδική) παράλληλος προς δοθείσα ευθεία.

Έστω *l* δοθείσα ευθεία, P σημείο εκτός της *l*.
Φέρουμε τη κάθετο προς την *l* από το P, έστω ευθεία *l'*.
Στη συνέχεια φέρουμε κάθετο προς την *l'* που να περνάει από το P. Είναι η ζητούμενη παράλληλος (γιατί) και είναι μοναδική (γιατί).

5ο αίτημα αίτημα των παραλλήλων

Το πέμπτο αίτημα είναι γνωστό και ως αίτημα των παραλλήλων.

Για να αποδείξει ο Saccheri (1667-1733) το πέμπτο αίτημα εφάρμοσε τη μέθοδο της επαγωγής σε άτοπο.
Δηλαδή προσπάθησε να απορρίψει τις εξής προτάσεις:

- Από σημείο εκτός ευθείας δεν μπορούμε να φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία.
- Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε περισσότερες από μία ευθεία παράλληλες προς την ευθεία.

Ο Saccheri είδε ότι υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στο δεύτερο και στο πέμπτο αίτημα . (Αν μία ευθεία μπορεί να επεκταθεί επάπειρο, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δε μπορεί να ξεπερνά τις δύο ορθές.)

Lambert και D’ Alembert



Εικόνα 1

Lambert (1728-1777) (π είναι άρρητος)

1766 (άθροισμα γωνιών τριγώνου και εμβαδού).



Εικόνα 2

D’ Alembert (1717-1783) αποκάλεσε το ζήτημα της αποτυχημένης προσπάθειας. Το σκάνδαλο των μαθηματικών! (1767)

Legendre



Εικόνα 3
Legendre 1752 – 1833 (40 χρόνια σε αυτό το πρόβλημα)
απέδειξε ισοδυναμία με άθροισμα γωνιών σε τρίγωνο 180).



Εικόνα 4
Λάθος εικόνα του Legendre

Καινούρια γεωμετρία

Καινούρια γεωμετρία

Gauss (1810?), 1832 Bolyai, 1829 Lobachevsky

Υπερβολική γεωμετρία:

Στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο ευθείες που δεν τέμνουν την αρχική.

Υπερβολική γεωμετρία

Υπερβολική γεωμετρία:

στο επίπεδο, από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο ευθείες που δεν τέμνουν την αρχική (δηλαδή οι δύο ευθείες είναι «παράλληλες» προς την αρχική)

Ισχύει ότι

το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών και ότι

τα όμοια τρίγωνα είναι ίσα!

Gauss



Εικόνα 5

Gauss (~1810, σημειώσεις που δε θέλησε να δημοσιεύσει, (**1777 - 1855)**)

Lobachevsky



Εικόνα 6

Lobachevsky (1829, στα ρωσικά σε μικρή τοπική πανεπιστημιακή έκδοση (1792-1856))

Ξανά το 1840 πιο αναλυτικά.

Bolyai



Εικόνα 7

Bolyai (1832 (1802-1860))

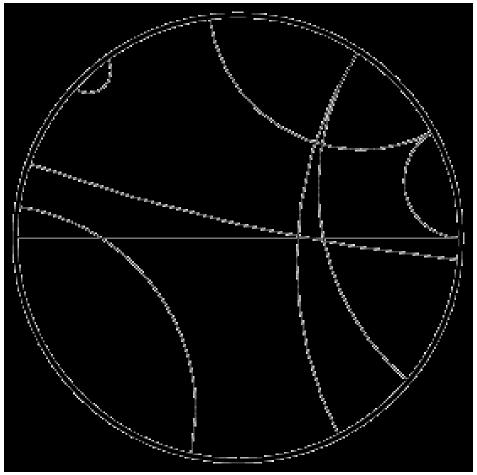
Παράρτημα σε βιβλίο του πατέρα του.

Poincare - Υπερβολική Γεωμετρία

Μοντέλο του Poincare (1854-1892) για την Υπερβολική Γεωμετρία:
Υπερβολικό επίπεδο: σημεία στο εσωτερικό κύκλου.
Ευθείες στο Υπερβολικό επίπεδο: διάμετροι και τόξα άλλων κύκλων που τέμνουν κάθετα τον αρχικό.

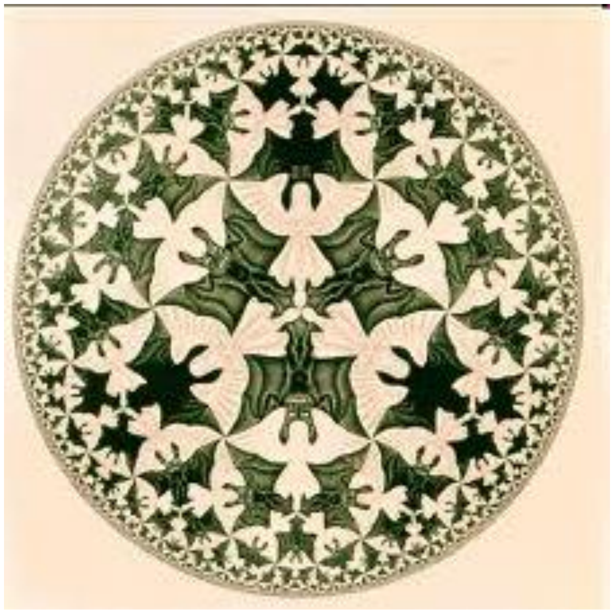


Εικόνα 8



Παραπάνω βλέπουμε 2 ευθείες που τέμνονται και είναι «παράλληλες» προς τρίτη.

Escher και το υπερβολικό επίπεδο.



Εικόνα 9

Στο έργο «Παράδεισος και Κόλαση» (1960). Όλοι οι άγγελοι και όλοι οι διάβολοι είναι ίσοι.

http://euler.slu.edu/escher/index.php/Hyperbolic_Geometry

Riemann (1826-1866)



Εικόνα 10

Ελλειπτική γεωμετρία, (1854).

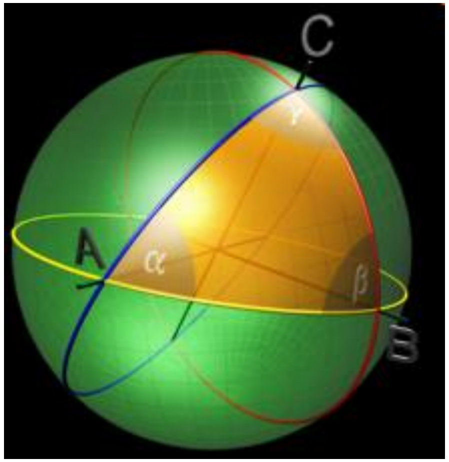
Δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.

Είναι αναγκαία η τροποποίηση του δεύτερου αιτήματος, (βλ. Saccheri) ως εξής:

Κάθε ευθεία γραμμή έχει το ίδιο πεπερασμένο μήκος.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών.

Felix Klein





Η επιφάνεια μίας σφαίρας:
Τα αντιδιαμετρικά σημεία ταυτίζονται και αντιστοιχούν σε ένα ελλειπτικό σημείο.
Ευθείες είναι οι «μέγιστοι κύκλοι» της σφαίρας (που έχουν ακτίνα όσο η ακτίνα της σφαίρας).

Εικόνα 11

David Hilbert: 1862-1943 Γερμανία (1)



Εικόνα 12

Στη Θεωρία των αναλλοίωτων ο Hilbert το 1888 έδωσε μη κατασκευαστική απόδειξη για την ύπαρκη πεπερασμένου συνόλου γεννητόρων.

Για αυτήν την απόδειξη ο Gordan είπε: «*Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie*». (απορρίπτοντας την πρώτη φορά την εργασία στο Math. Annalen).

David Hilbert: 1862-1943 Γερμανία (2)



Εικόνα 13

Η συλλογή **23 προβλημάτων που παρουσίασε το 1900** στο διεθνές συνέδριο σο Παρίσι (υπόθεση του Riemann, Goldbach) σημάδεψε την εξέλιξη των Μαθηματικών. Δούλεψε στο Πανεπιστήμιο του **Göttingen** από το 1895. Επέβλεψε 69 Ph.D., (ανάμεσα σε αυτούς F. Bernstein, H. Weyl, R. Courant, E. Hecke) και επηρέασε πλήθος άλλων όπως E. Zermelo, J.von Neumann, E. Noether.

David Hilbert: 1862-1943
Γερμανία (3)



Εικόνα 14

Συλλογή **23 προβλημάτων το 1900** στο διεθνές συνέδριο στο Παρίσι (υπόθεση του Riemmann, Goldbach)

Πανεπιστήμιο του **Göttingen** από το 1895

69 Ph.D., (Felix Bernstein , Hermann Weyl Richard Courant, Erich Hecke , …)

Επηρέασε:
Ernst Zermelo, John von Neumann, Emmy Noether **….**

Κενά και ελλείψεις στα «Στοιχεία»

Μελετώντας τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη πιο προσεκτικά, βλέπει κανείς ότι υπάρχουν κάποια κενά και ελλείψεις (χρειάζονται και άλλοι ορισμοί και αξιώματα).

Ενδεικτικά:
Πρόταση 1, βιβλίο 1: Για την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου. Γιατί οι δύο κύκλοι τέμνονται?

Πολλές αποδείξεις βασίζονται στη διαίσθηση ή στο σχήμα. Αυτό έγινε περισσότερο αντιληπτό με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Πλήρης αξιωματοποίηση της Ευκλείδειας γεωμετρίας

Πλήρης αξιωματοποίηση της Ευκλείδειας γεωμετρίας επιχειρήθηκε από τον **Hilbert** το 1899 στο βιβλίο του *Grundlagen der Geometrie* (βάσεις της Γεωμετρίας).

Πρότεινε 21 αξιώματα: αξιώματα σχέσεων, διάταξης, ισότητας, συνέχειας και το αξίωμα των παραλλήλων.

Άφησε τις έννοιες του σημείου, ευθείας, επίπεδο χωρίς να τις ορίσει. Καθόρισε όμως τις μεταξύ τους σχέσεις. Συνολικά χρησιμοποίησε 9 «πρωταρχικές έννοιες» από τις οποίες 6 οι βασικές σχέσεις (όπως ανήκει και ισότητα).

Το 1902 αποδείχτηκε ότι ένα από τα 21 αξιώματα ήταν περιττό.

Πρόγραμμα του Hilbert «μεταμαθηματικά»

1920: πρόγραμμα του Hilbert =«μεταμαθηματικά».
Ήθελε να δείξει ότι

1. Όλα τα μαθηματικά παράγονται από ένα σωστά διαλεγμένο πεπερασμένο σύνολο αξιωμάτων και
2. Ένα τέτοιο σύνολο αξιωμάτων μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι συνεπές

όμως

το 1931 ο Godel με το Θεώρημα της μη πληρότητας απέδειξε ότι είναι αδύνατο να αποδειχθεί η συνέπεια ή ασυνέπεια.



Εικόνα 15

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/4)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**JHLambert**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:JHLambert.jpg#mediaviewer/File:JHLambert.jpg
- **Εικόνα 2:** "**Alembert**" by Maurice Quentin de La Tour - Didier Descouens 2002. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alembert.jpg#mediaviewer/File:Alembert.jpg
- **Εικόνα 3:** "**Legendre**" by Julien-Léopold Boilly - http://www.numericana.com/answer/record.htm#legendre where it was cropped from here. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Legendre.jpg#mediaviewer/File:Legendre.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/4)

- **Εικόνα 4:** "Louis Legendre" by François Séraphin Delpech - not given. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Louis_Legendre.jpg#mediaviewer/File:Louis_Legendre.jpg
- **Εικόνα 5:** "**Bendixen - Carl Friedrich Gauß, 1828**" by Siegfried Detlev Bendixen - published in "Astronomische Nachrichten" 1828. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg
- **Εικόνα 6:** "**Lobachevsky** 03 crop" by Lev Kriukov (father); cropped by Beyond My Ken(talk)17:10, 27 January 2011 (UTC)- http://cczy.blog.ru/?year=2009&month=11. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lobachevsky_03_crop.jpg#mediaviewer/File:Lobachevsky_03_crop.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/4)

- **Εικόνα 7**: "**JanosBolyai**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:JanosBolyai.jpg#mediaviewer/File:JanosBolyai.jpg
- **Εικόνα 8:** "**Henri Poincare**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:
  Henri_Poincare.jpg#mediaviewer/File:Henri_Poincare.jpg
- **Εικόνα 9:** http://euler.slu.edu/escher/upload/archive/0/06/20080415193200!Circle-limit-IV.jpg
- **Εικόνα 10:** "**Georg Friedrich Bernhard Riemann**" by This file is lacking author information. - http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/explore.htm according to the German Wikipedia.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/4)

- Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg#mediaviewer/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg
- **Εικόνα 11:** "**Felix Klein**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Felix_Klein.jpeg # mediaviewer/File:Felix_Klein.jpeg
- **Εικόνα 12,13,14:** "**Hilbert**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert.jpg# mediaviewer/File:Hilbert.jpg
- **Εικόνα 15:** "**Kurt gödel**". Via Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kurt_g%C3%B6del.jpg#mediaviewer/File:Kurt_g%C3%B6del.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 3: Αρχιμήδης

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 3.1: Αρχιμήδης

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

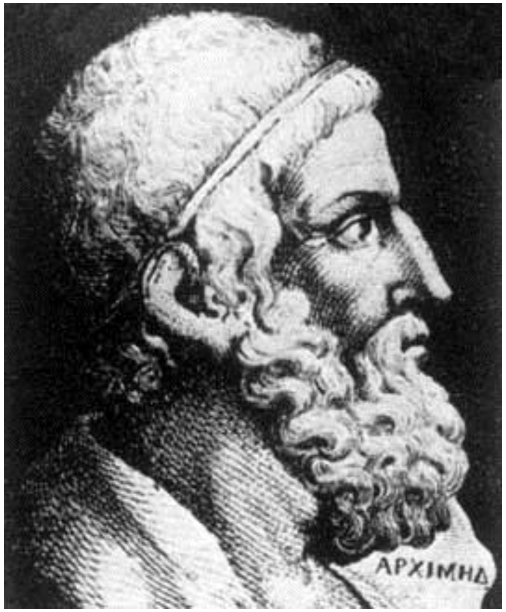
Περιεχόμενα Ενότητας

- Αρχιμήδης.
- Η μέθοδος: σφαίρα και κύλινδρος.

Σκοποί Ενότητας

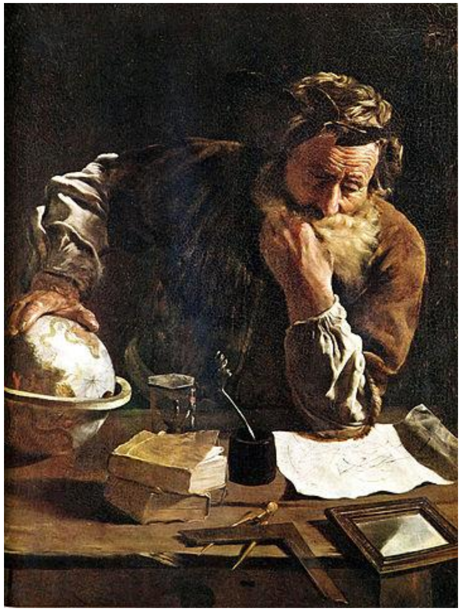
- Στην ενότητα αυτη παρουσιάζεται η συμβολή του Αρχιμήδη στην εξέλιξη των μαθηματικών και η «μέθοδος» του Αρχιμήδη για την ανακάλυψη θεωρημάτων.

Αρχιμήδης 287 π.Χ. - 212 π.Χ.



Εικόνα 1

Domenico Fetti 1620



Εικόνα 2

Fields medal προτομή, κύβος+κύλινδρος



Εικόνα 3

"FieldsMedalFront"



Εικόνα 4

"FieldsMedalBack"

Fields medal

Fields medal (το Nobel των μαθηματικών): 1936, 1950 και κάθε 4 χρόνια (σε κάποιον ηλικίας < 40 ετών) (15.000 καναδέζικα δολάρια).
Άλλα βραβεία:

Abel prize: Νορβηγία, από το 2003, κάθε χρόνο, (περίπου 1 εκατομμύριο δολάρια).

Chern's prize: International Mathematical Union (IMU) κάθε 4 χρόνια, (250.000 αμερικάνικα δολάρια).

Η υπόθεση του Riemann (1)



Εικόνα 5

Παρένθεση: Το ένα εκατομμύριο δολλάρια, η συνάρτηση ζ(s) του Riemann (1826-1866) και η Κατανομή πρώτων αριθμών (1859).

Η υπόθεση του Riemann:

τα «μη τετριμμένα μηδενικά» της ζ(s) έχουν τη μορφή $\frac{1}{2}+it$ όπου t πραγματικός.

$$\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

$$=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\cdots$$

Η υπόθεση του Riemann (2)

Όταν $Re(s) > 1$ τότε

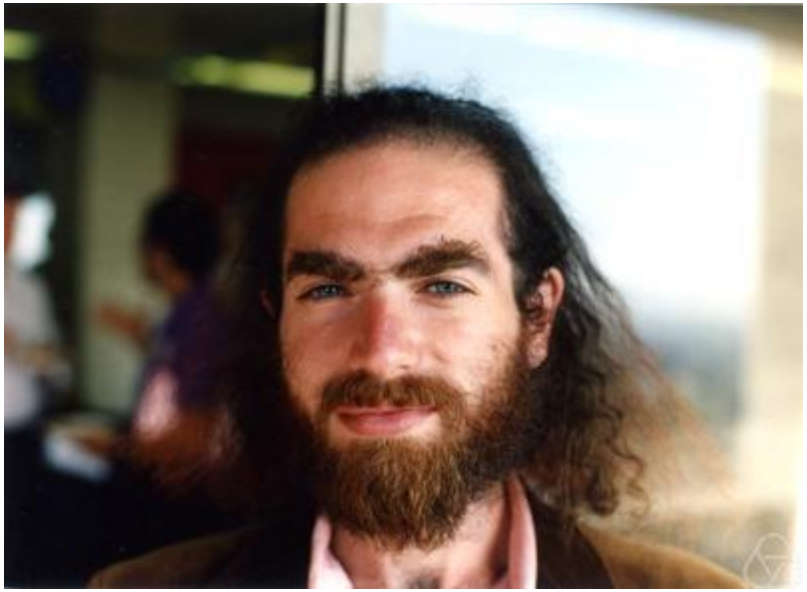
$$\zeta(s) = \prod_{p\ prime} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdots \frac{1}{1-p^{-s}} \cdots$$

Και όταν $0 < Re(s) < 1$ ισχύει

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

(τα $s = -2, -4, \dots$ μηδενίζουν την και είναι τα τετριμμένα μηδενικά της).

Παρένθεση: το ένα εκατομμύριο δολλάρια και η εικασία του Poincare (1904) στη Τοπολογία



Εικόνα 6

Perelman (1966-) Ρωσία

2002 (η απόδειξη)
2006 (η αποδοχή)

2006: Fields medal(αρνήθηκε)

2010: βραβείο 1,000,000 $
Clay Institute (αρνήθηκε)

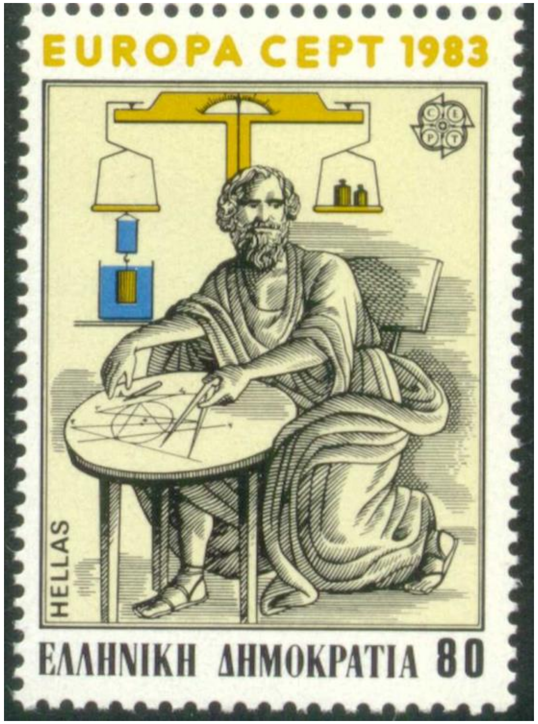
(Θέμα παρουσίασης)

Archimede (1)



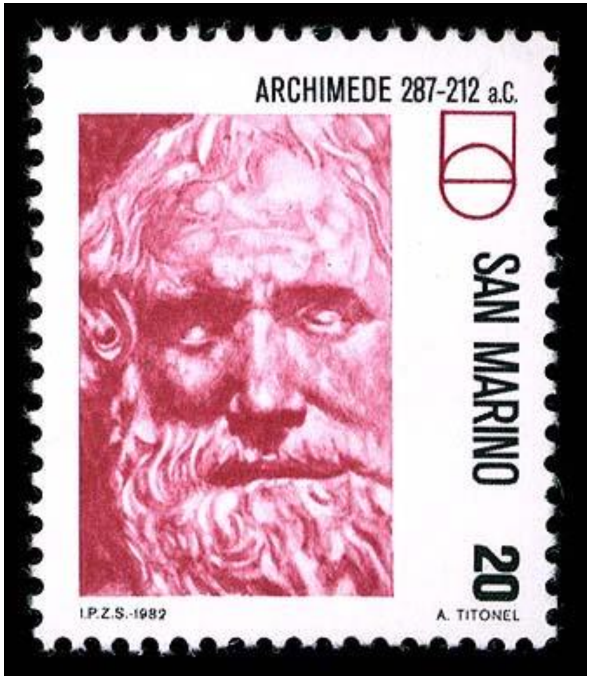
Εικόνα 7

Archimede (2)

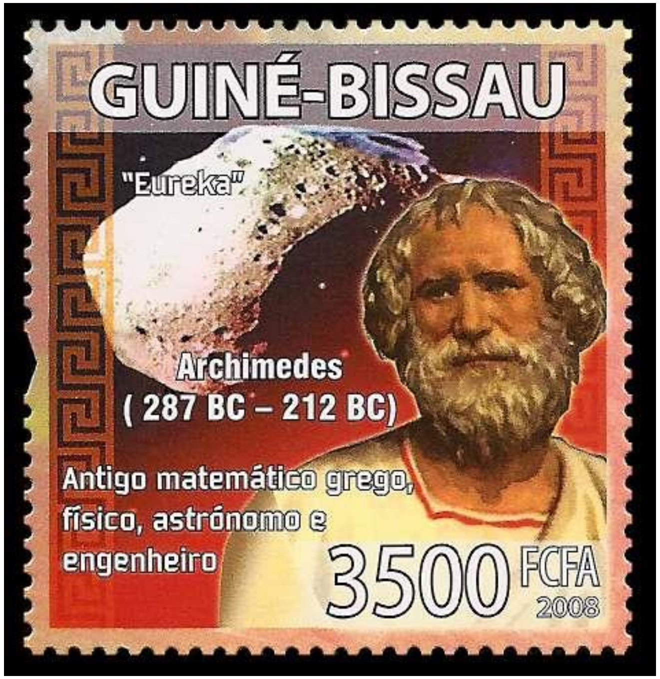


Εικόνα 8

Archimede (3)



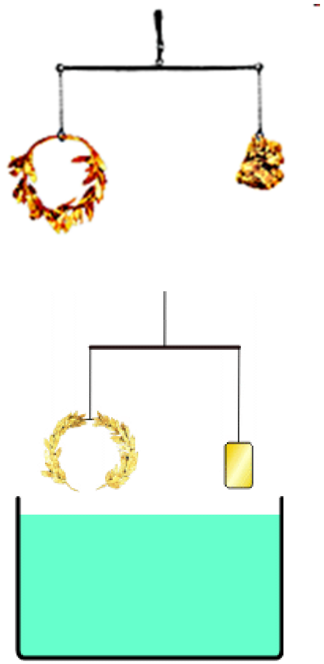
Εικόνα 9



Εικόνα 10

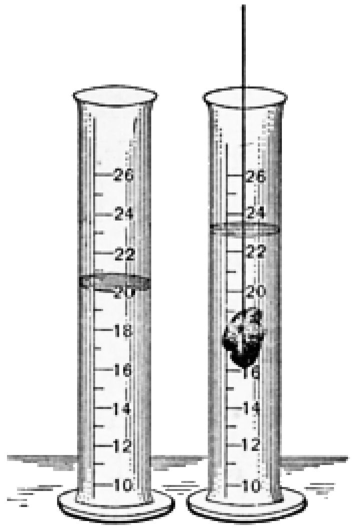
Εύρηκα, Εύρηκα

Η ιστορία με το χρυσό και το στέμμα του Ιέρωνα



- Το στέμμα έχει το σωστό βάρος: όσο το χρυσό που δόθηκε για να φτιαχτεί.
- Είναι όμως ολοκάθαρο χρυσό?
- Έχει το σωστό όγκο?
- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στέμματος?

Αρχή του Αρχιμήδη στην υδροστατική



Εικόνα 11

Κάθε σώμα που βυθίζεται μέσα σ΄ ένα υγρό χάνει τόσο από το βάρος του, όσο το βάρος του υγρού που εκτοπίζει. (Αρχή του Αρχιμήδη στην υδροστατική).

Το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται είναι ανάλογο του όγκου του.

Ο όγκος του υγρού που εκτοπίζεται είναι ίσος με τον όγκο του σώματος που είναι βυθισμένο.

Έτσι βυθίζοντας σώματα σε υγρό μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο τους.

Η έλικα του Αρχιμήδη

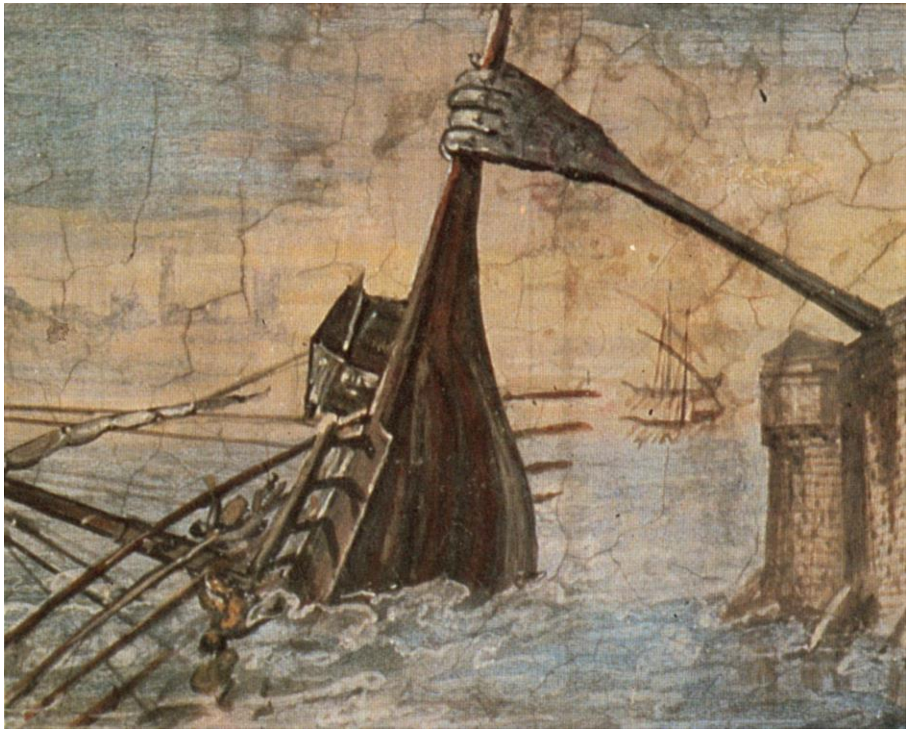


Εικόνα 12

Για την άρδευση στην

Αίγυπτο.

Εφαρμοσμένη μηχανική



Άρπαγας
Εικόνα 13

Κάτοπτρα του Αρχιμήδη (1)



Giulio Parigi (1571-1635) ~1600

Εικόνα 14

Κάτοπτρα του Αρχιμήδη (2)



Εικόνα 15

Πείραμα του Σακκά 1973



Εικόνα 16

Το πλανητάριο του Αρχιμήδη



Εικόνα 17

Έβρισκε ταυτόχρονα την θέση ήλιου, σελήνης και 6 πλανητών (σύμφωνα με τον Κικέρωνα, Cicero Marcus Tullius, 106-43 π.Χ) οδοντωτός τροχός?

Μηχανισμός Των Αντικυθήρων

(στηρίζεται στο πλανητάριο?)

Ο Θάνατος του Αρχιμήδη
«*Μη μου τους κύκλους τάραττε*»



Εικόνα 18

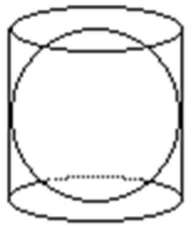
Ciceron Decouvrant le Tombeau d'Archimede, by the French painter Pierre Henri de Valenciennes (1750-1819)



Εικόνα 19

Τάφος του Αρχιμήδη: Η σφαίρα και ο κύλινδρος

Ο όγκος της σφαίρας είναι τα 2/3 του όγκου του κυλίνδρου.



Πλούταρχος, Βίοι Παράλληλοι Μάρκελλος 45-120 μ.Χ.

Πολλῶν δὲ καὶ καλῶν εὑρετὴς γεγονὼς λέγεται τῶν φίλων δεηθῆναι καὶ τῶν συγγενῶν ὅπως αὐτοῦ μετὰ τὴν τελευτὴν ἐπιστήσωσι τῷ τάφῳ τὸν περιλαμβάνοντα τὴν σφαῖραν ἐντὸς κύλινδρον, ἐπιγράψαντες τὸν λόγον τῆς ὑπεριχῆς τοῦ περιέχοντος στερεοῦ πρὸς τὸ περιεχόμενον.

Έργα του Αρχιμήδη (1)

(έχουν βρεθεί)

1. "Περί σφαίρας και κυλίνδρου” Βιβλίο α' και β'.
2. "Κύκλου μέτρησις” Σώζονται τρία θεωρήματα.
3. "Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων" (32 θεωρήματα, 1 πόρισμα) .
4. "Περί ελίκων" (28 θεωρήματα, 6 πορίσματα).
5. "Περί επιπέδων ισορροπιών ή κέντρα βαρών επιπέδων ή Μηχανικά" Βιβλία α' και β'.
6. "Βιβλίο λημμάτων”.
7. "Πρόβλημα Βοεικόν”.
8. "Κατασκευή πλευράς του περιγραφομένου εις κύκλο επταγώνου”.

Έργα του Αρχιμήδη (2)

8. "Περί σφαίρας και κυλίνδρου" Βιβλίο α' και β‘.
9. "Ωρολόγιον Αρχιμήδους" (Σώζεται στα αραβικά).
10. "Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων“.
11. "Αρχαί της Γεωμετρίας“.
12. “Ψαμμίτης“.
13. "Τετραγωνισμός παραβολής“.
14. Πρόσφατα διαβάστηκαν από το Παλίμψηστο αποσπάσματα από τα έργα που διασώθηκαν σε αυτό:
15. «Οστομάχιο».
16. «Περί μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος» (=μέθοδος).
17. «Περί των επιπλεόντων σωμάτων“.
18. «Οχουμένων" (Υδροστατική επιπλεόντων σωμάτων) .

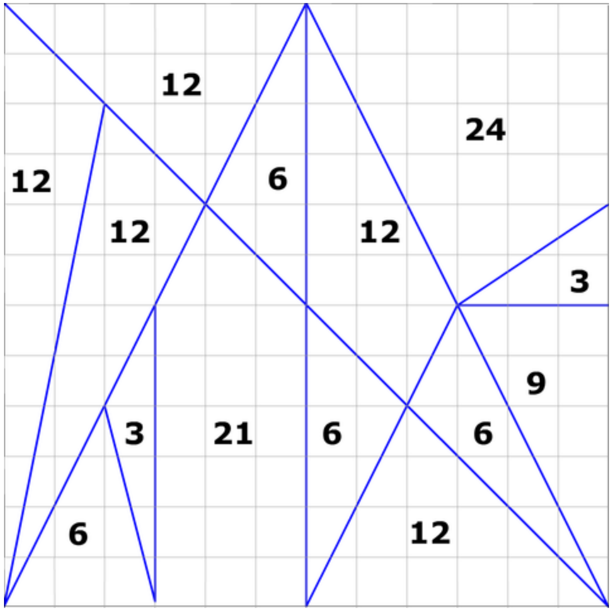
Έργα του Αρχιμήδη που δεν έχουν ακόμα βρεθεί: (1)

1. "Αριθμητικά".
2. "Βαρουλκός, Υδροσκοπίαι, Πνευματική".
3. "Επισίδια Βιβλία" (Μάλλον περί στατιστικής -Τζέτζης).
4. "Περί τριγώνων".
5. "Περί τετραπλεύρου".
6. "Περί ζευγών".
7. "Περί 13 ημικανονικών πολυέδρων".
8. "Ισοπεριμετικά".
9. "Ισορροπίαι".
10. "Καύσις δια κατόπτρων" "Περί Αρχιτεκτονικής".

Έργα του Αρχιμήδη που δεν έχουν ακόμα βρεθεί: (2)

11. "Περί βαρύτητος και ελαφρότητος" (Πυκνόμετρα-Αραιόμετρα)
12. "Περί δρομομέτρων" (Οδόμετρα πλοίων).
13. "Περί κέντρου Βάρους ή Κεντροβαρικά".
14. "Κατοπρικά".
15. "Περί παραλλήλων γραμμών".
16. "Περί κοίλων και παραβολικών κατόπτρων".
17. "Προοπτική".
18. "Στοιχεία μηχανικών".
19. "Πλινθίδες και Κύλινδροι".
20. "Στοιχεία επί των στηρίξεων".
21. "Σφαιροποιΐα".

«Οστομάχιον»: η μάχη των οστών (σχημάτων)



Εικόνα 20

Ο Ψαμμίτης
Η αρχή - Το τέλος

Η αρχή

Ι. Οιονταί τινες, βασιλεύ Γέλων, του ψάμμου τον αριθμόν άπειρον είμεν τω πλήθει. Λέγω δε ου μόνον του περί Συαρακούσας τε και τάν άλλαν Σικελίαν υπάρχοντος, αλλά και του κατά πάσαν χώραν τάν τε οικημέναν και ταν αοίκητον. Εντί τινες δε,

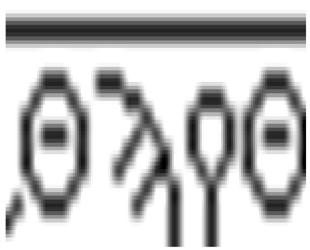
Το τέλος

Ταύτα δε, βασιλεύ Γέλων, τοις μεν πολλοίς και μη κεκοινωνηεκότεσσι των μαθημάτων ούκ εύπιστα φανήσειν υπολαμβάνω, τοις δε μεταλελαβηκότεσσιν και περί των αποστημάτων και των μεγεθέων τας τε γας και του αλίου και τας σελήνας και του όλου κόσμου πεφροντικότεσσιν πιστά δια ταν αποδείξειν εσσείςθαι διόπερ ωηθήν και ουκ ανάρμοστον είμεν [έτι] επιθεωρήσαι ταύτα.

Ο Ψαμμίτης ("*Άμμου Καταμέτρης*")

- το σύνολο των στοιχειωδών σωματιδίων (πρωτονίων και ηλεκτρονίων) σε όλο το σύμπαν υπολογίζεται κάπου ανάμεσα στο 10 εις την 70 και 10 εις την 85.
- Η τελική εκτίμηση του Αρχιμήδη δίνει άνω όριο 10 εις την 64 κόκκων σε ένα σύμπαν πλήρες άμμου. (Θεωρία του Αρίσταρχου για ένα ηλιοκεντρικό σύστημα).

Μυριάς μυριάδων



=9999



=10,000 Μυριάς



=9,999 x 10,000+9,999=99,990,000+9,999=

99,999,999=10 εις την ογδόη -1

Σύστημα αρίθμησης του Αρχιμήδη του επιτρέπει να φτάσει έως 10^{64}

Η περίμετρος της γης είναι μικρότερη των 300 μυριάδων στάδια (~$5 \cdot 10^5$ km).

Ο ήλιος είναι μικρότερος των 30 φορές τη Σελήνη.

Η γωνιακή διάμετρος του Ήλιου από τη Γη μεγαλύτερη 1/200 ορθής γωνίας.

Άρα η διάμετρος του σύμπαντος (καθορίζεται από τη τροχιά της Γης γύρω από τον ήλιο) είναι το πολύ 10^{14} στάδια.

Αρκούν 10^{64} κόκκοι άμμου.

Βοεικό πρόβλημα και εξίσωση Pell (1)

Σε ένα ποίημα που αποδίδεται στον Αριστοτέλη και που εστάλη ως επιστολή στον Ερατοσθένη.

Να βρεθεί το πλήθος των βοών του (θεού) Ηλίου.
Το πρόβλημα αφορά την εύρεση του αριθμού των αγελάδων και ταυρών 8 χρωμάτων συνολικά, που ικανοποιούν γραμμικό ομογενές σύστημα με 7 εξισώσεις (8 άγνωστοι, 7 εξισώσεις).
Στη συνέχεια τίθεται το πρόβλημα να βρεθεί το πλήθος τους αν ικανοποιούν δύο πρόσθετε συνθήκες (το ένα άθροισμα να είναι τετραγωνικός αριθμός ενώ το άλλο άθροισμα να είναι τριγωνικό).

Βοεικό πρόβλημα και εξίσωση Pell (2)

Οι 7 εξισώσεις έχουν άπειρες λύσεις: ο αριθμός των αγελάδων και των βοδιών για κάθε χρώμα είναι:

10,366,482 t
7, 460,514 t
7,358,060 t
4, 149, 387 t
7, 026, 360 t
4, 893,246 t
3, 515,820 t
5, 439,213 t

όπου t φυσικός αριθμός.

Οι άλλες δύο οδηγούν σε μία εξίσωση Pell

$$x^2 - 410{,}286{,}423{,}278{,}424y^2 = 1$$

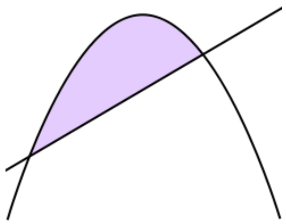
Η απάντηση είναι αριθμός με περισσότερα από 200,000 ψηφία (1880 Amthor)!

Δόθηκε το 1965 με χρήση δύο υπολογιστών IBM.

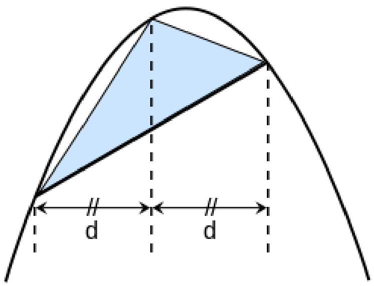
(Η μέθοδος επίλυσης εξισώσεων Pell με συνεχή κλάσματα βρέθηκε από τον Lagrange το 1780).

Ο Αρχιμήδης είχε χρησιμοποιήσει εξισώσεις Pell για την προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 3. Στη Δύση εμφανίζεται και πάλι τον 16^{o} αιώνα από τον Fermat.

Λογισμός και Αρχιμήδης: η μέθοδος της εξάντλησης "Τετραγωνισμός παραβολής"



Εικόνα 21

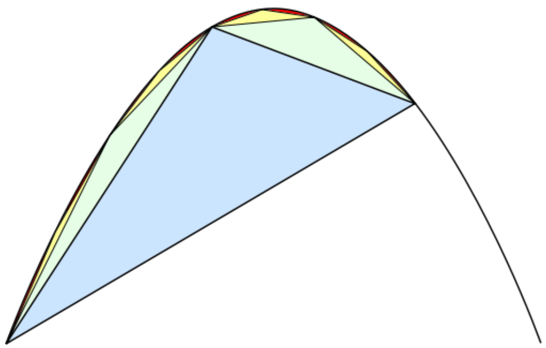


Εικόνα 22

Υπολογίζεται ότι το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του τριγώνου με τρίτη κορυφή το μακρύτερο (από την τέμνουσα) σημείο του παραβολικού τμήματος.

Ο Αρχιμήδης δίνει δύο αποδείξεις: μία βασισμένη στις αρχές της μηχανικής και μία γεωμετρική.

«Τετραγωνισμός παραβολής» (1)



Εικόνα 23

Στη γεωμετρική απόδειξη ο Αρχιμήδης δείχνει ότι το εμβαδόν των πράσινων τριγώνων είναι ίσο με το 1/8 του εμβαδού του μπλε τριγώνου και ούτω καθεξής.

Ο Αρχιμήδης «γεμίζει» το χώρο ανάμεσα στη παραβολή και τέμνουσα με τρίγωνα: ξεκινά με το μπλε τρίγωνο και προσθέτει τα πράσινα. Για κάθε πράσινο προσθέτει τα αντίστοιχα νέα πράσινα, και ούτω καθεξής.

Έτσι αν Α είναι το εμβαδόν του τριγώνου, το εμβαδόν ανάμεσα στη τέμνουσα και στη παραβολή είναι:

$A,\ A + A/_4\ ,\ A + A/_4 + A/_{16}\ ,\ A + A/_4 + A/_{16} + A/_{64}\ ,\ \ldots$

«Τετραγωνισμός παραβολής» (2)

Θέλει λοιπόν να υπολογίσει το άθροισμα

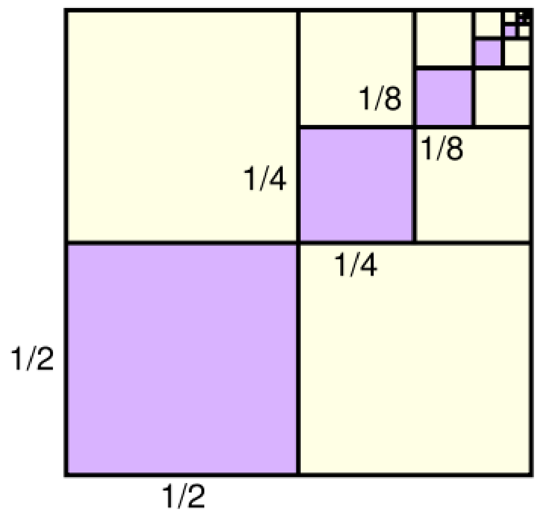
$$\mathrm{A}(1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + \cdots) = \mathrm{A}4/3$$

Γνωρίζουμε ότι $\sum 4^{-n} = \frac{1}{1-1/2} = 4/3.$

Όμως οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν αυτούς τους τύπους για σειρές.

Γεωμετρικά η παραπάνω σχέση προκύπτει από την εικόνα:

«Τετραγωνισμός παραβολής» (3)



Εικόνα 24

Το σύνολο των εμβαδών των μωβ τετραγώνων της εικόνας αντιστοιχούν στο άθροισμα

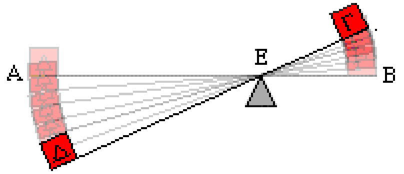
1/ 4 + 1/16 + …

Στα δεξιά και πάνω από κάθε μωβ τετράγωνα υπάρχουν άλλα δύο ίσα κίτρινα τετράγωνα. Άρα μώβ είναι το 1/ 3 του συνολικού εμβαδού.

Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω

Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών
ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.
Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ



ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,

ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/8)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "ആർക്കിമിഡീസ്" by Unknown - http://ecalculo.if.usp.br/historia/arquimedes.htm. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:%E0%B4%86%E0%B5%BC%E0%B4%95%E0%B5%8D%E0%B4%95%E0%B4%BF%E0%B4%AE%E0%B4%BF%E0%B4%A1%E0%B5%80%E0%B4%B8%E0%B5%8D%E2%80%8C.jpg#mediaviewer/File:%E0%B4%86%E0%B5%BC%E0%B4%95%E0%B5%8D%E0%B4%95%E0%B4%BF%E0%B4%AE%E0%B4%BF%E0%B4%A1%E0%B5%80%E0%B4%B8%E0%B5%8D%E2%80%8C.jpg
- **Εικόνα 2: "Domenico-Fetti Archimedes 1620"** by Domenico Fetti - http://archimedes2.mpiwg-berlin.mpg.de/archimedes_templates/popup.htm. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:DomenicoFetti_Archimedes_1620.jpg#mediaviewer/File:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/8)

- **Εικόνα 3:** "**FieldsMedalFront**" by Stefan Zachow of the International Mathematical Union; retouched by King of Hearts - File Front.tif. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:FieldsMedalFront.jpg#mediaviewer/File:FieldsMedalFront.jpg
- **Εικόνα 4:** "**FieldsMedalBack**" by Stefan Zachow of the International Mathematical Union; retouched by King of Hearts - File Back.tif. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:FieldsMedalBack.jpg#mediaviewer/File:FieldsMedalBack.jpg
- **Εικόνα 5:** "**Georg Friedrich Bernhard Riemann**" by This file is lacking author information. -http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/explore.htm according to the German Wikipedia. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/8)

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg#mediaviewer/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg

- **Εικόνα 6:** "**Perelman, Grigori (1966)**" by George M. Bergman - Mathematisches Institut Oberwolfach (MFO). Licensed under GNU Free Documentation License via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perelman,_Grigori_(1966).jpg#mediaviewer/File:Perelman,_Grigori_(1966).jpg
- **Εικόνα 7:** http://jeff560.tripod.com/images/arch2.jpg
- **Εικόνα 8:** http://jeff560.tripod.com/images/arch4.jpg
- **Εικόνα 9:** http://jeff560.tripod.com/images/arch3.jpg
- **Εικόνα 10:** http://jeff560.tripod.com/images/arch7.jpg
- **Εικόνα 11:** "Submerged-and-Displacing" by Michael Malak - "**First Principles of Physics**", Henry Carhart & Horatio Chute, Allyn & Bacon, 1912. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/8)

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Submerged-and-Displacing.png#mediaviewer/File:Submerged-and-Displacing.png

- **Εικόνα 12:** "**Chambers 1908 Archimedean Screw**" by Rev. Thomas Davidson 1856-1923 (ed.) - Chambers's Twentieth Century Dictionary of the English Language. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chambers_1908_Archimedean_Screw.png#mediaviewer/File:Chambers_1908_Archimedean_Screw.png
- **Εικόνα 13:** "**Parigi griffe**" από τον Giulio Parigi - http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Claw/illustrations.html. Υπό την άδεια Public domain μέσω Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parigi_griffe.jpg#mediaviewer/File:Parigi_griffe.jpg
- **Εικόνα 14:** "**Archimedes-Mirror by Giulio Parigi**" by Giulio Parigi - [1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons –

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/8)

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ArchimedesMirror_by_Giulio_Parigi.jpg #mediaviewer/File:Archimedes-Mirror_by_Giulio_Parigi.jpg

- **Εικόνα 15:** "**Specchi ustori Archimede**" by Autore sconosciuto - archimedeitts.altervista.org. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Specchi_ustori_Archimede.jpg#mediaviewer/File:Specchi_ustori_Archimede.jpg
- **Εικόνα 16:** https://www.cs.drexel.edu/~crorres/bbc_archive/mirrors_sailors_sakas.jpg
- **Εικόνα 17:** "**NAMA Machine d'Anticythère 1**". Υπό την άδεια Creative Commons Attribution 2.5 μέσω Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NAMA_Machine_d%27Anticyth%C3%A8re_1.jpg#mediaviewer/File:NAMA_Machine_d%27Anticyth%C3%A8re_1.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/8)

- **Εικόνα 18:** "**Death of Archimedes**" di Thomas Degeorge - fonte. Con licenza Public domain tramite Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Death_of_Archimedes.png#mediaviewer/File:Death_of_Archimedes.png
- **Εικόνα 19:** «**Valenciennes, Pierre-Henri de - Cicero Discovering the Tomb of Archimedes** » par Pierre-Henri de Valenciennes — edu.augustins.org. Sous licence Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Valenciennes,_PierreHenri_de_-_Cicero_Discovering_the_Tomb_of_Archimedes.jpg#mediaviewer/File:Valenciennes,_Pierre-Henri_de_-_Cicero_Discovering_the_Tomb_of_Archimedes.jpg
- **Εικόνα 20:** "**StomachionConstruction**" by RosarioVanTulpe - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:StomachionConstruction.png#mediaviewer/File:StomachionConstruction.png

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (7/8)

- **Εικόνα 21:** "**Parabolic Segment**" by en:User:Jim.belk (original); Pbroks13 (talk) (redraw) -http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Parabolic_Segment.png. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parabolic_Segment.svg#mediaviewer/File:Parabolic_Segment.svg
- **Εικόνα 22:** "**Parabola and inscribed triangle**" by derivative work: Pbroks13 (talk)Parabola-and-inscribed_triangle.png: Mattes - Parabola-and-inscribed_triangle.png. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parabola_and_inscribed_triangle.svg#mediaviewer/File:Parabola_and_inscribed_triangle.svg
- **Εικόνα 23:** "**Parabolic Segment Dissection**" by en:User:Jim.belk (original); Pbroks13 (talk) (redraw) - en:Image:Parabolic Segment Dissection.png. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parabolic_Segment_Dissection.svg#mediaviewer/File:Parabolic_Segment_Dissection.svg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (8/8)

- **Εικόνα 24:** "**GeometricSquares**" by en:User:Jim.belk (original); Pbroks13 (talk) (redraw) - en: Image:GeometricSquares.png. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeometricSquares.svg#mediaviewer/File:GeometricSquares.svg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 3: Αρχιμήδης.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 3.2: Η μέθοδος: σφαίρα και κύλινδρος.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

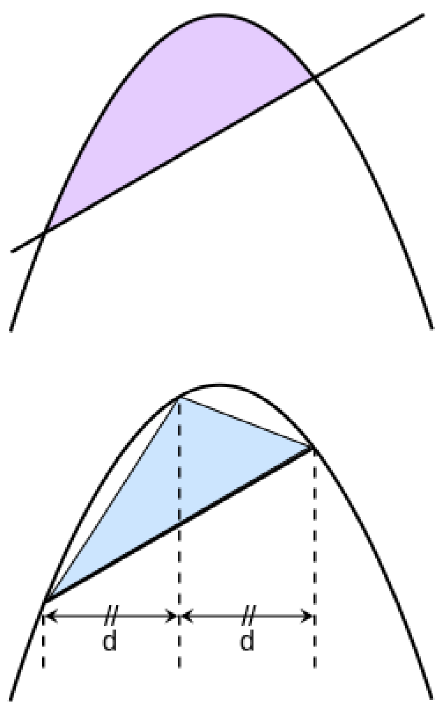
Περιεχόμενα Ενότητας

- Αρχιμήδης.
- Η μέθοδος: σφαίρα και κύλινδρος.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτη παρουσιάζεται η συμβολή του Αρχιμήδη στην εξέλιξη των μαθηματικών και η «μέθοδος» του Αρχιμήδη για την ανακάλυψη θεωρημάτων.

"Τετραγωνισμός της παραβολής"



Εικόνα 1

Υπολογίζεται ότι το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του τριγώνου με τρίτη κορυφή το μακρύτερο (από την τέμνουσα) σημείο του παραβολικού τμήματος.

Ο Αρχιμήδης δίνει δύο αποδείξεις: μία βασισμένη στις αρχές της μηχανικής και μία γεωμετρική.

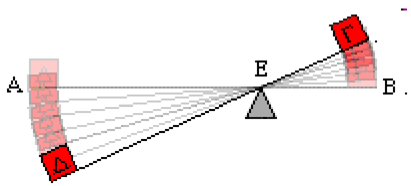
Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω (1)

Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ



ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,

ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

Προσέγγιση για το π (Αρχιμήδης)

"Κύκλου μέτρησις"

Το θεώρημα εκφράζει τον λόγο της περιφέρειας του κύκλου ως προς τη διάμετρο του κύκλου , δηλ. το π.

$3\ {}^{10}/_{71} < \pi < 3\ 1/\ 7$

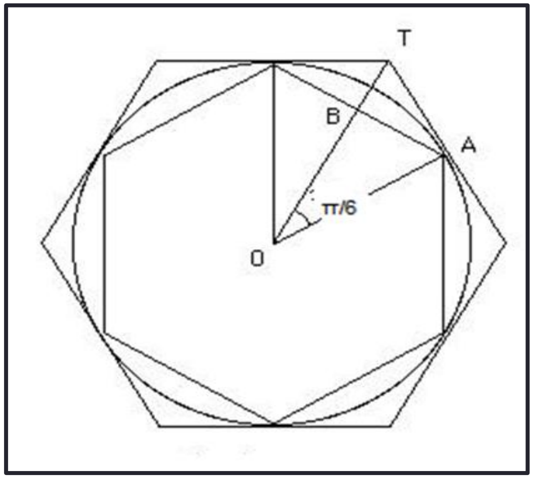
(3.14085…< π < 3.14286)

Κανονικά 96-γωνα

Ο Αρχιμήδης κατασκευάζει δύο κανονικά 96-γωνα (ένα εγγεγραμένο και ένα περιγεγραμένο του κύκλου), διχοτομώντας διαδοχικά τις γωνίες.

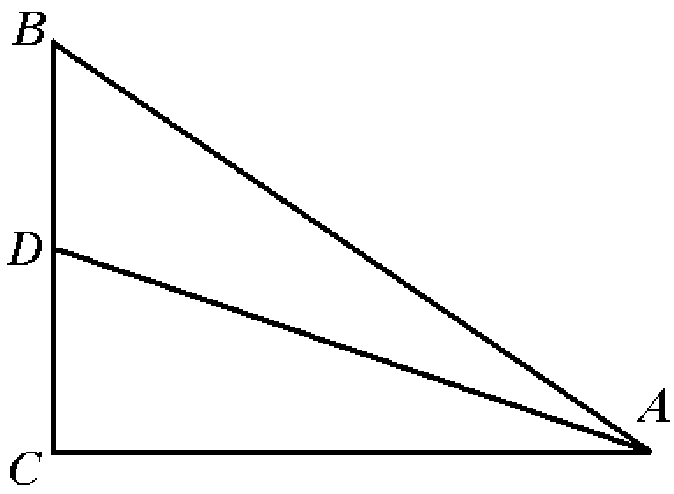
Η ΟΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη. Έτσι οι γωνίες είναι

π/ 6, π/12,…



Προσέγγιση για το π

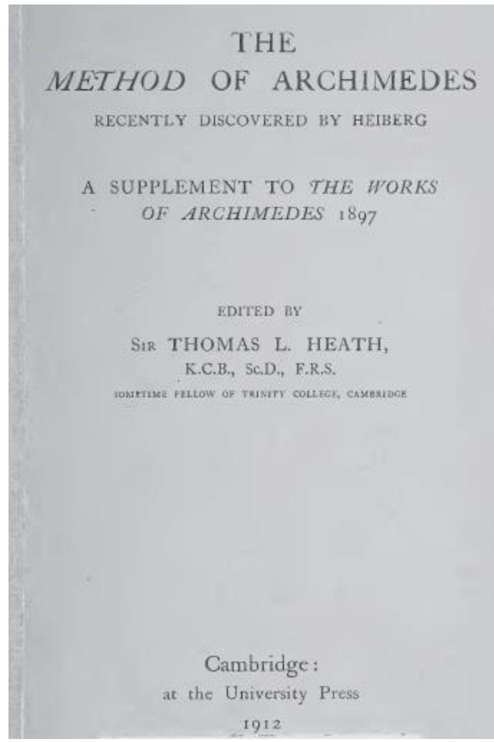
Χρησιμοποιεί την Πρόταση 3, βιβλίο 6, «Στοιχεία», Ευκλείδης



AD διχοτομεί την γωνία BAC
Τότε BD: DC= AB: AC

Μαζί με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, συγκρίνει το λόγο της διαμέτρου του κύκλου με τις περιφέρειες των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων 96-γώνων και παίρνει άνω και κάτω όρια .

The method of Archimedes



THE
METHOD OF ARCHIMEDES
RECENTLY DISCOVERED BY HEIBERG

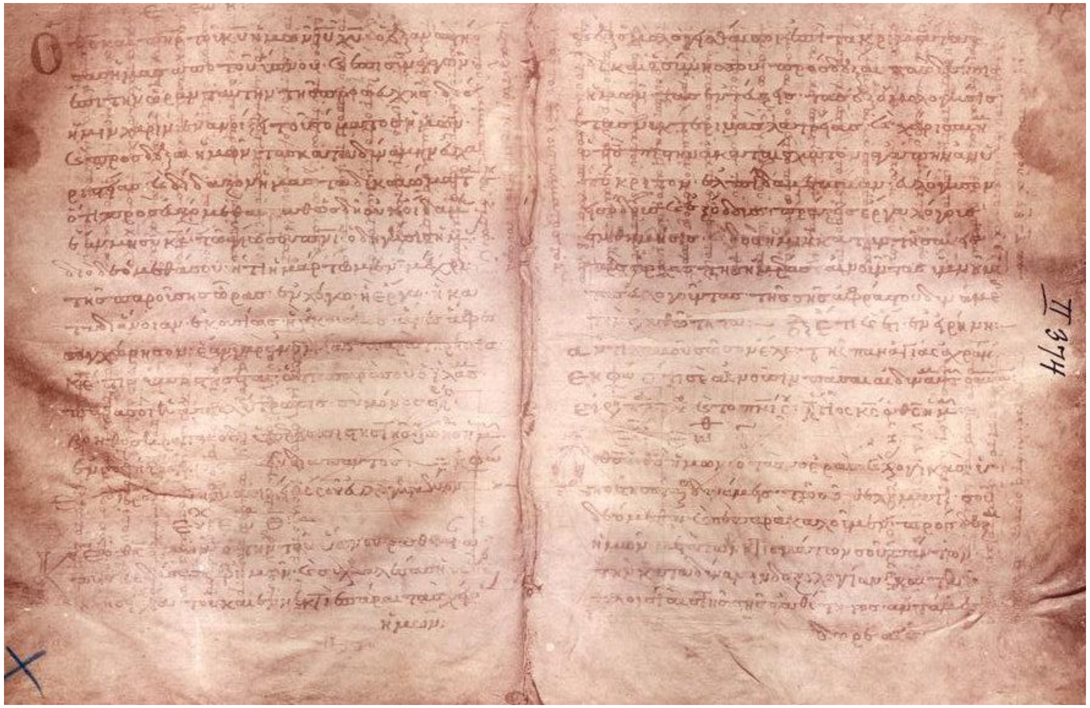
A SUPPLEMENT TO *THE WORKS OF ARCHIMEDES* 1897

EDITED BY
SIR THOMAS L. HEATH,
K.C.B., Sc.D., F.R.S.
SOMETIME FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

Cambridge:
at the University Press
1912

Εικόνα 2

Παλίμψηστος



Εικόνα 3

Παλίμψηστα

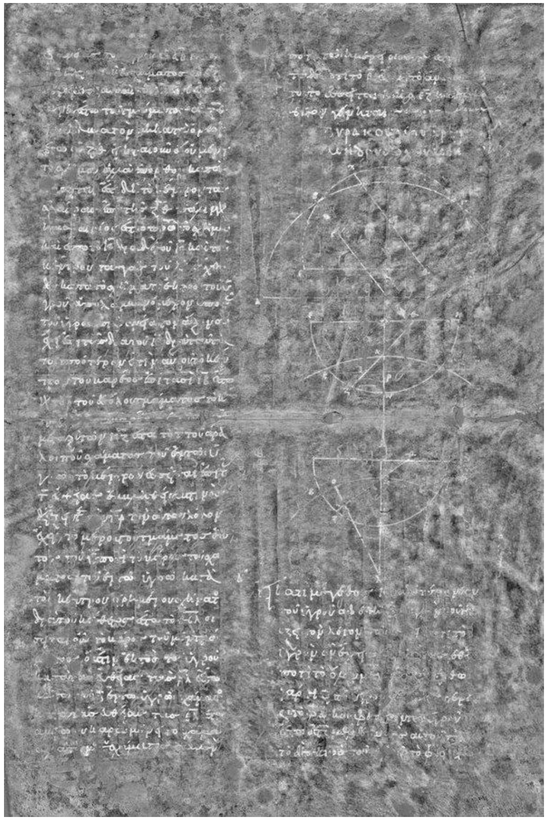
- Παλίμψηστα: αρχαίοι πάπυροι και περγαμηνές πολλαπλής χρήσης.
- Το παλίμψηστο (συλλογή προσευχών) εξετάστηκε το 1906 στη Κωνσταντινούπολη από τον Heiberg που αντιλήφθηκε τη σημασία του. Διάβασε 80% και βρήκε 7 κείμενα του Αρχιμήδη.
- Χάθηκε 1922-1998. Βρέθηκε σε πολύ χειρότερη κατάσταση…
- Το 1998 πουλήθηκε σε πλειστηριασμό του Christie's στην Νέα Υόρκη για 2,2 εκατομμύρια δολάρια. Αγοραστής: άγνωστος.
- Σήμερα βρίσκεται στο Walters Art Museum.

7 έργα του Αρχιμήδη

Στο Παλίμψηστο βρίσκονται 7 έργα του Αρχιμήδη:

- **«Περί επιπέδων ισορροπιών».**
- **«Κύκλου μέτρησις».**
- **«Περί των μηχανικών θεωρημάτων, προς Ερατοσθένη έφοδος».**
- **«Περί ελίκων**».
- **«Στομάχιον».**
- **«Περί των επιπλεόντων σωμάτων».**
- **«Περί σφαίρας και κυλίνδρου»**.

Παλίμψηστος--ευχολόγιον



Εικόνα 4

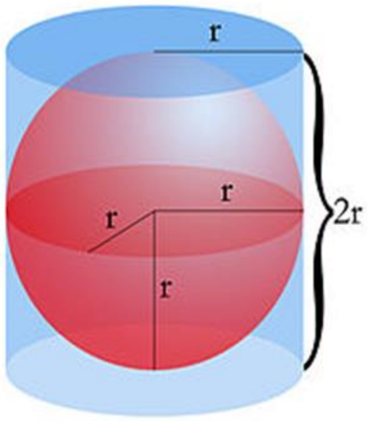
Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος

- Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἤ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν.
- Άλλωστε κάποιες ιδιότητες που στην αρχή μου αποκαλύφθηκαν με τη μηχανική στη συνέχεια αποδείχθηκαν με τη γεωμετρία, διότι η προσέγγιση που γίνεται με τη μέθοδο αυτή δεν επιδέχεται απόδειξης. Είναι ευκολότερο να οδηγηθείς στην απόδειξη, εάν έχεις αποκτήσει εκ των προτέρων κάποια γνώση του πράγματος, παρά αν ψάχνεις κάτι για το οποίο δεν έχεις την παραμικρή ιδέα.

Ο Αρχιμήδης στην Έφοδο για την μέθοδό του

Για να βρούμε ένα ζητούμενο εμβαδόν ή όγκο κόβουμε την επιφάνεια ή το σώμα σ' ένα πολύ μεγάλο αριθμό λεπτές, παράλληλες και επίπεδες λωρίδες ή λεπτές παράλληλες φέτες και (νοητά) κρεμάμε αυτά τα κομμάτια στο ένα άκρο δεδομένου μοχλού με τέτοιον τρόπο, ώστε αυτά να βρίσκονται σε ισορροπία με ένα σχήμα του οποίου η περιεκτικότητα και το κέντρο βάρους είναι γνωστά.

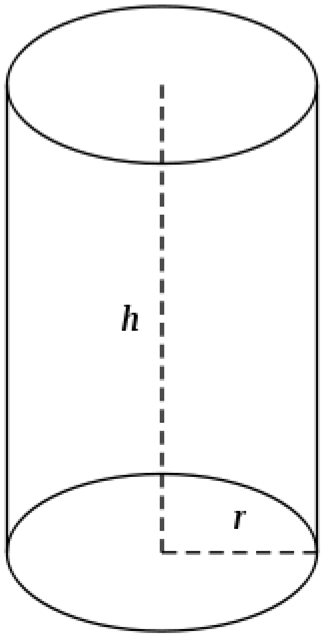
Το Θεώρημα του Αρχιμήδη



Εικόνα 5

Ο όγκος του κυλίνδρου (με ακτίνα r και ύψος 2r) είναι ίσος με τα 3/2 του όγκου της σφαίρας (με ακτίνα r)!

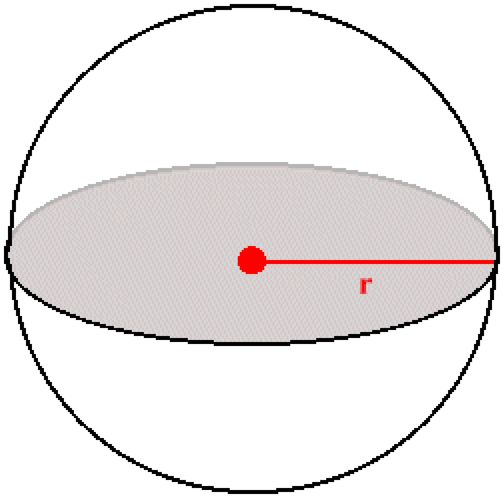
Όγκος κυλίνδρου



Σήμερα ο όγκος του κυλίνδου υπολογίζεται εύκολα ως το τριπλό ολοκλήρωμα

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r s ds d\varphi dz = \pi r^2 h$$

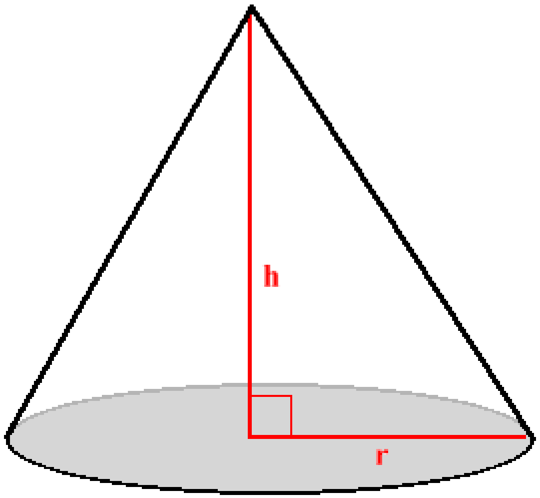
Όγκος σφαίρας



Ο όγκος της σφαίρας επίσης προκύπτει από κατάλληλο τριπλό ολοκλήρωμα (ποιο?)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Όγκος κώνου



Ο κώνος χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι (αν θεωρήσουμε ότι ξεκινάμε από τη βάση, με ύψος 0 και προχωράμε προς τη κορυφή) τότε η εγκάρσια τομή στο ύψος z είναι κύκλος ακτίνα r(h-z)/h.

Έτσι ο όγκος του κώνου προκύπτει από το ολοκλήρωμα

$$V = \int_0^h \pi r^2 \frac{(h-z)^2}{h^2} dz = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Τι από όλα αυτά γνώριζαν οι αρχαίοι Έλληνες πριν τον Αρχιμήδη? (1)

- Στο βιβλίο 12 των Στοιχείων του Ευκλείδη, στην πρόταση 18 (την τελευταία του βιβλίου) ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι:

Αν S και T είναι δύο σφαιρες με ακτίνες r_1 και r_2 και όγκους V_1 και V_2 τότε

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Άρα ο όγκος της σφαίρας είναι ίσος με κάποια σταθερά επί το κύβο της ακτίνας. (Ποια σταθερά όμως?)

Τι από όλα αυτά γνώριζαν οι αρχαίοι Έλληνες πριν τον Αρχιμήδη? (2)

- Στο ίδιο βιβλίο ο Ευκλείδης δείχνει ότι ο όγκος του κώνου είναι το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου με το ίδιο ύψος.
- Το κάνει χρησιμοποιώντας την αρχή της εξάντλησης του Ευδόξου. Πρώτα κατασκευάζει δύο ακολουθίες πολυεδρικών στερεών εγγεγραμμένων στον κώνο και στον κύλινδρο αντίστοιχα και δείχνει ότι τα πολύεδρα ικανοποιούν την επιθυμητή σχέση.

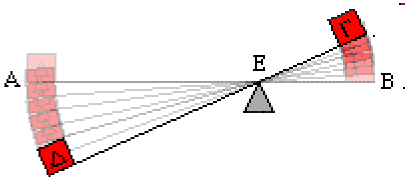
Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω (2)

Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ



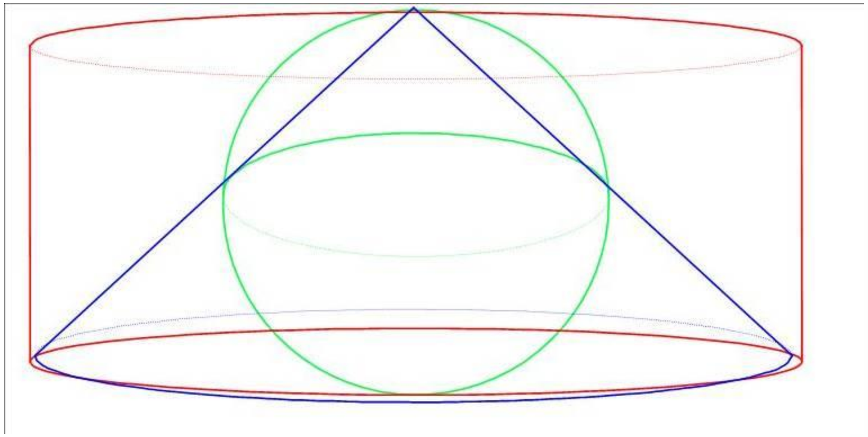
ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,
ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (1)

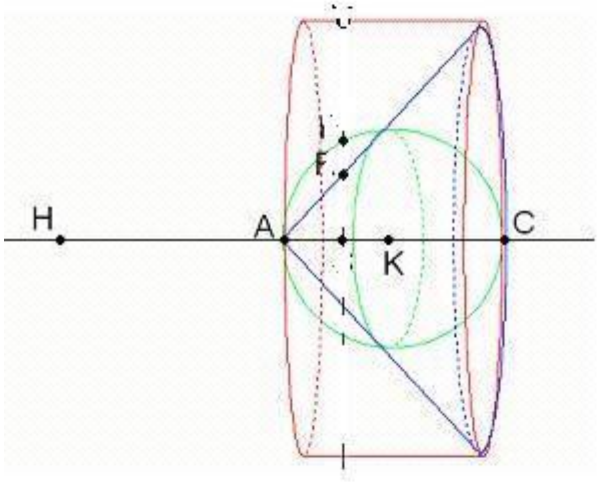
Κύλινδρος = 3 κώνος

[Στοιχεία, Πρόταση 13.10]

Θεωρούμε τον κύλινδρο και τον κώνο που οι βάσεις τους έχουν ακτίνα ΔΥΟ φορές την ακτίνα της σφαίρας.



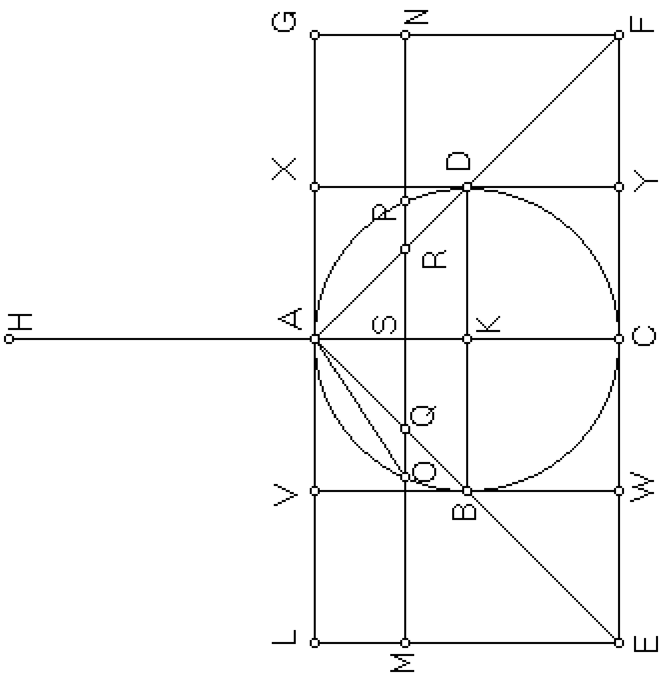
Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (2)



Θα ισορροπήσουμε το σύστημα σφαίρας,κώνου, κυλίνδρου ως προς A, την κορυφή του κώνου.

Έστω HA=AC=2r.

Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (3)



Οι εγκάρσιες τομές σφαίρας, κώνου και του κυλίνδρου, είναι κύκλοι!!

Θεωρούμε την τομή MN.

Από ιδιότητες ομοίων τριγώνων προκύπτει ότι

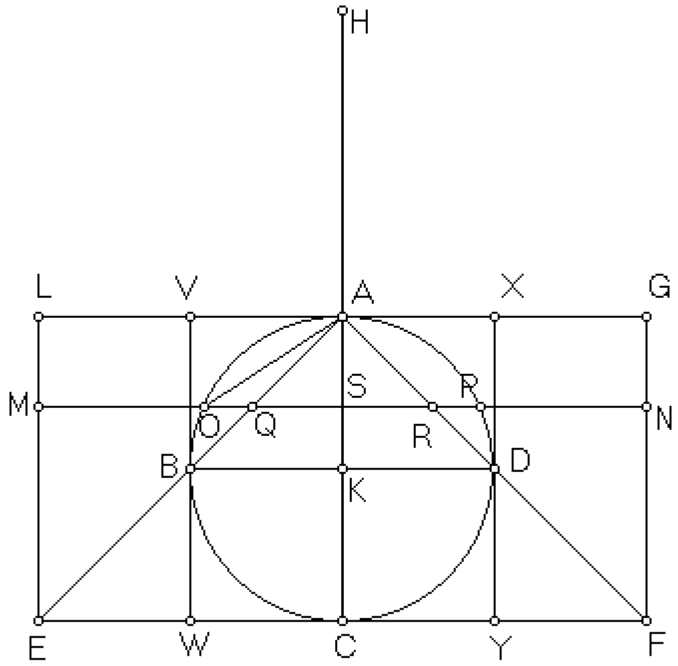
$$AC : AS = MN^2 : (OP^2 + QR^2)$$

Το τετράγωνο MN^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κυλίνδρου.

Το τετράγωνο OP^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή της σφαίρας.

Το τετράγωνο QR^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κώνου.

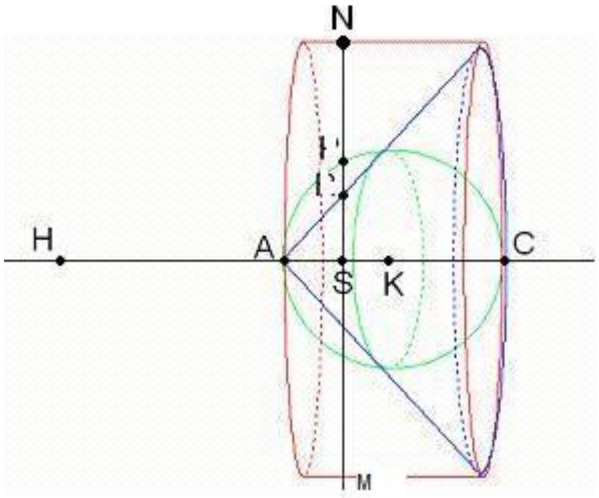
Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (4)



Αφού HA=AC, από τη προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι το σύστημα των εγκάρσιων τομών κυλίνδρου, σφαίρας και κώνου ισορροπεί ως προς το A αν τις τομές της σφαίρας και του κώνου στο H και τη τομή του κυλίνδρου στο S. Το S όμως (σε αντίθεση με το A) είναι μεταβλητό: για κάθε τομή του κυλίνδρου είναι το κέντρο του κύκλου.

Τι γίνεται αν θεωρήσουμε τα στερεά και όχι μόνο τις τομές τους?

Σφαίρα, κώνος, κύλινδρος (5)



Συμπέρασμα: Το σύστημα ισορροπεί ως προς το A αν θέσουμε στο H την σφαίρα και τον κώνο και τον κύλινδρο στο K (αφού K είναι το κέντρο βάρους του).

Έτσι προκύπτει ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι 3/2 του όγκου της εγγεγραμμένης σφαίρας.

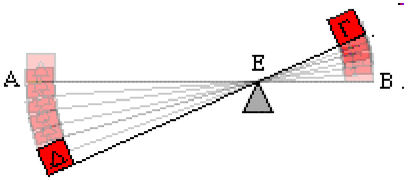
Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω (3)

Βιβλίο 1, περί επιπέδων ισορροπιών

ΤΑ ΜΕΓΕΘΕΑ ΙΣΟΡΡΟΠΕΟΝΤΙ ΑΠΟ ΜΑΚΕΩΝ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΟΤΩΣ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ ΛΟΓΟΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΤΟΙΣ ΒΑΡΕΣΙΝ.

Τα μεγέθη Γ, Δ τοποθετημένα στο Β και στο Α αντίστοιχα θα έρθουν σε ισορροπία ως προς το Ε όταν οι αποστάσεις τους από το Ε, δηλ. ΒΕ, ΑΕ ικανοποιούν σχέση αντιστρόφως ανάλογες με το βάρος τους:

Γ:Δ=ΑΕ: ΒΕ



ΤΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΝ ΒΑΡΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΙΝΟΥΝ,

ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΑΝΤΙΠΕΠΟΝΘΕΝ.

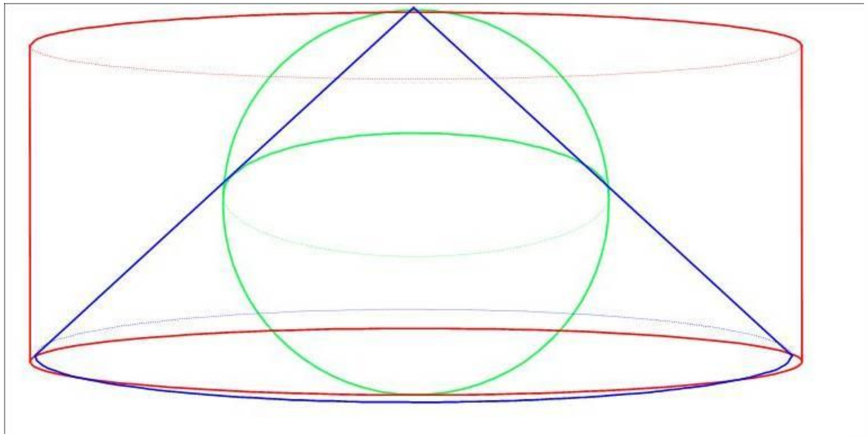
Σχέση μεταξύ όγκων (1)

Θα ισορροπήσουμε το σύστημα της σφαίρας, του κώνου και του κυλίνδρου που έχουν το ίδιο ύψος με της σφαίρα, αλλά με ακτίνα βάσης ΔΥΟ φορές την ακτίνα της σφαίρας.

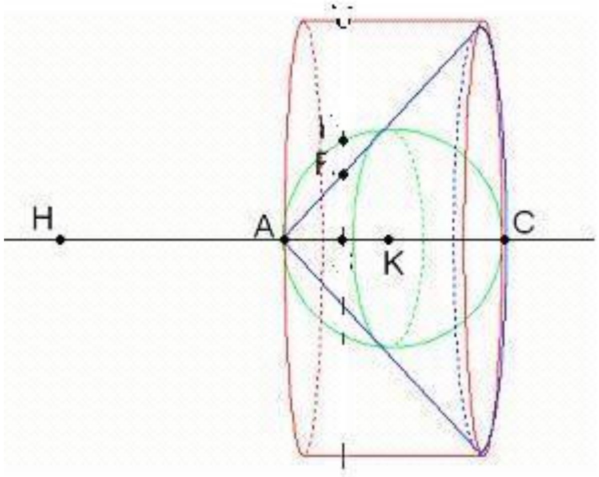
Αφού ο κύλινδρος είναι ο πιο ογκώδης από τους άλλους δύο, θα πρέπει να τοποθετήσουμε μαζί σφαίρα και κώνο από τη μεριά και τον κύλινδρο από την άλλη.

Κύλινδρος = 3 κώνος

[Στοιχεία, Πρόταση 13.10]

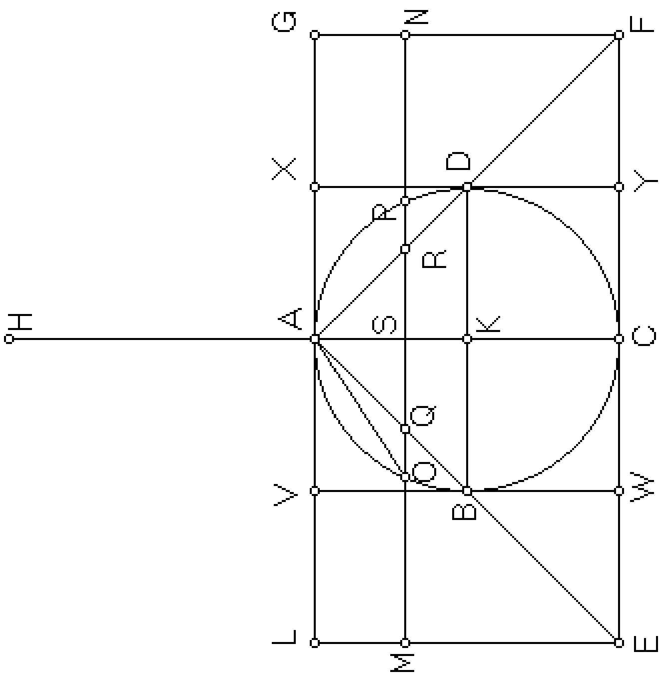


Σχέση μεταξύ όγκων (2)



- Επιλέγουμε ως A το σημείο που θα καθορίσει την ισορροπία.
- C είναι το σημείο έτσι ώστε AC=2r, όπου r η ακτίνα της σφαίρας.
- Θέτουμε H το σημείο που είναι αντιδιαμετρικά αντίθετο από το C.

Σχέση μεταξύ όγκων (3)

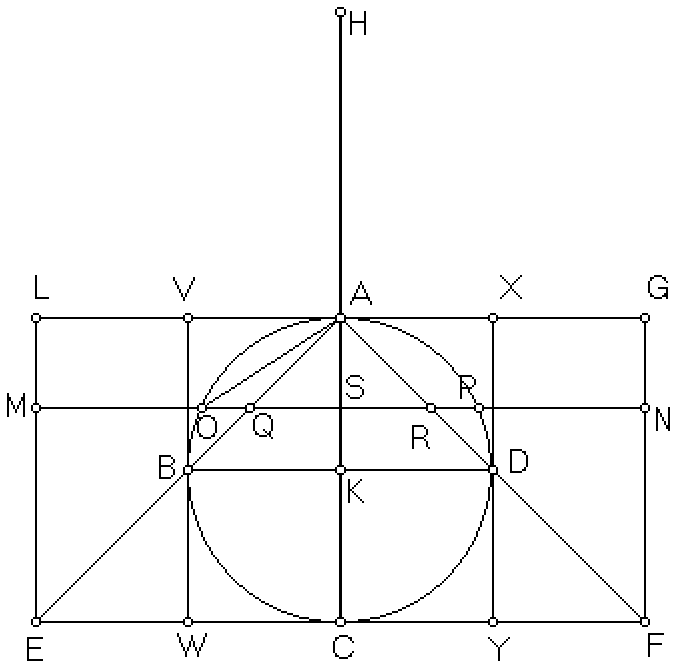


Οι εγκάρσιες τομές σφαίρας, κώνου και του κυλίνδρου, είναι κύκλοι!!
Θεωρούμε την τομή MN.
Από ιδιότητες ομοίων τριγώνων προκύπτει ότι

$$AC : AS = MN^2 : (OP^2 + QR^2)$$

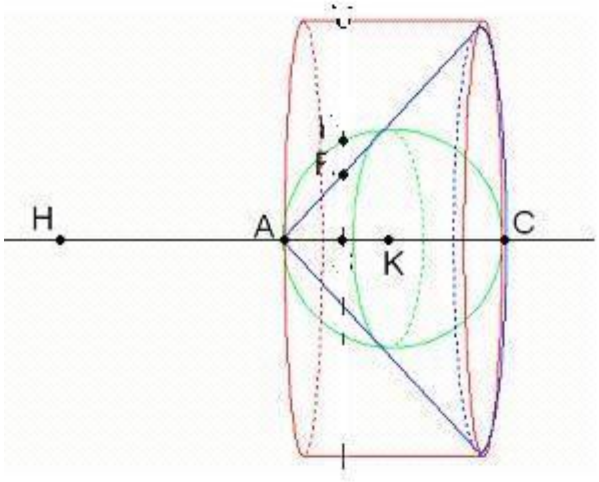
Το τετράγωνο MN^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κυλίνδρου.
Το τετράγωνο OP^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή της σφαίρας.
Το τετράγωνο QR^2 αντιστοιχεί στον κύκλο που είναι η εγκάρσια τομή του κώνου.

Σχέση μεταξύ όγκων (4)



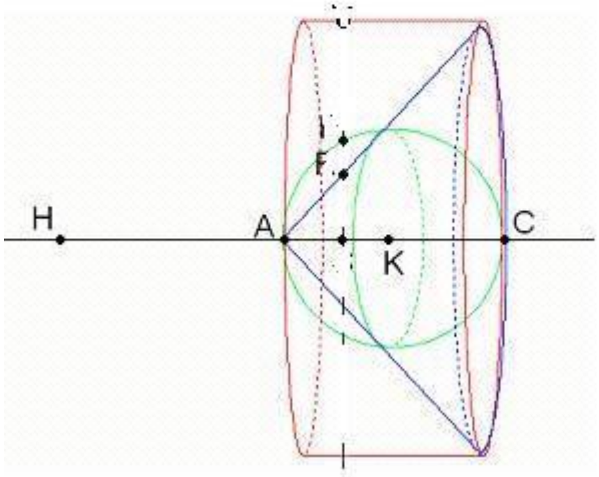
- Αφού HA=AC, από τη προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι το σύστημα των εγκάρσιων τομών κυλίνδρου, σφαίρας και κώνου ισορροπεί ως προς το Α αν τις τομές της σφαίρας και του κώνου στο Η και τη τομή του κυλίνδρου στο S. Το S όμως (σε αντίθεση με το Α) είναι μεταβλητό: για κάθε τομή του κυλίνδρου είναι το κέντρο του κύκλου.
- Τι γίνεται αν θεωρήσουμε τα στερεά και όχι μόνο τις τομές τους?

Σχέση μεταξύ όγκων (5)



- **Συμπέρασμα**: Το σύστημα ισορροπεί ως προς το Α αν θέσουμε στο Η την σφαίρα και τον κώνο και τον κύλινδρο στο Κ (αφού Κ είναι το κέντρο βάρους του).

Σχέση μεταξύ όγκων (6)



Άρα

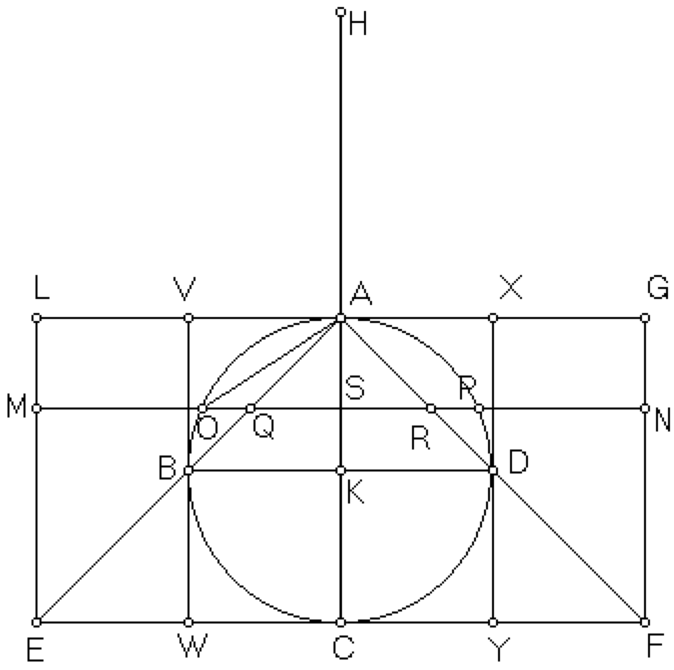
ΗΑ: ΑΚ=κύλινδρος : σφαίρα + κώνος

Αφού ΗΑ=2ΑΚ συμπεραίνουμε ότι

όγκος κόκκινου κυλίνδρου είναι διπλάσιος του αθροίσματος των όγκων της σφαίρας και του μπλέ κώνου).

Όπως γνωρίζουμε από τον Ευκλείδη (12.13) ο όγκος του κόκκινου κυλίνδρου είναι ίσος με τρεις φορές τον όγκο του μπλέ κώνου. Τελικά ο όγκος του μπλε κώνου είναι δύο φορές ο όγκος της σφαίρας.

Σχέση μεταξύ όγκων (7)



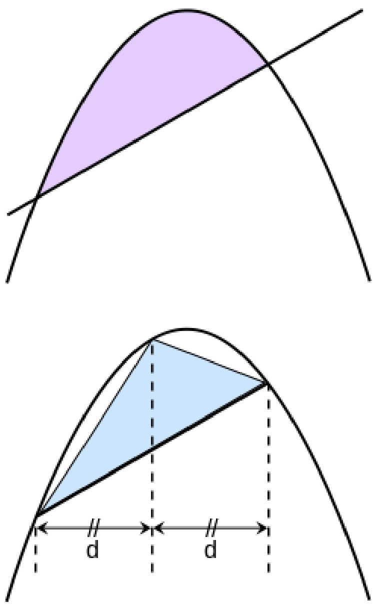
Τέλος συγκρίνουμε τον όγκου του μπλέ κώνου με τον όγκο του κώνου με βάση στο BD και ύψος KA.

Σύμφωνα με τον Ευκλείδη (12.12) ο μπλε όγκος είναι οκταπλάσιος του μικρότερου. Άρα η σφαίρα μας έχει τετραπλάσιο όγκο από τον όγκου του μικρού κώνου.

Πάλι από τον Ευκλείδη ο όγκος του μικρού κώνου είναι το 1/3 του όγκου του αντίστοιχου κυλίνδρου, και άρα το 1/6 του όγκου του κυλίνδου που μας ενδιαφέρει.

Έτσι προκύπτει ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι 3/2 του όγκου της εγγεγραμμένης σφαίρας.

Λογισμός και Αρχιμήδης: η μέθοδος της εξάντλησης "Τετραγωνισμός παραβολής"



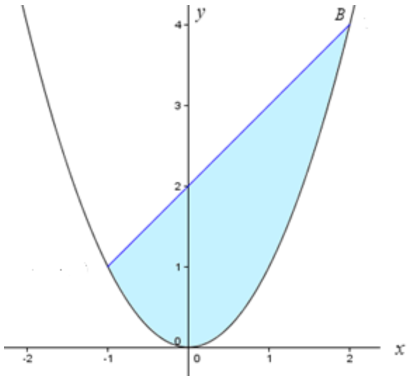
Εικόνα 6

Το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του αντίστοιχου τριγώνου (προσοχή στην κατασκευή του τριγώνου).

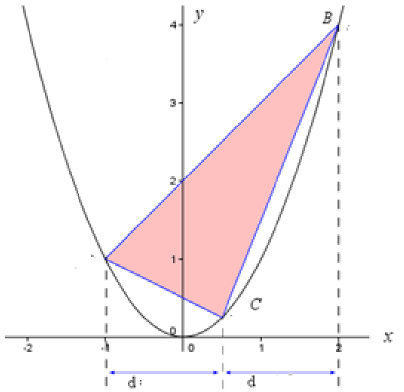
Το σημείο στην παραβολή που προσδιορίζει το τρίγωνο απέχει το μέγιστο από την τέμνουσα, και η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο είναι παράλληλη προς την τέμνουσα.

Ισορροπία και εμβαδά

Το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή και τέμνουσα ισούται τα 4/3 του αντίστοιχου τριγώνου.

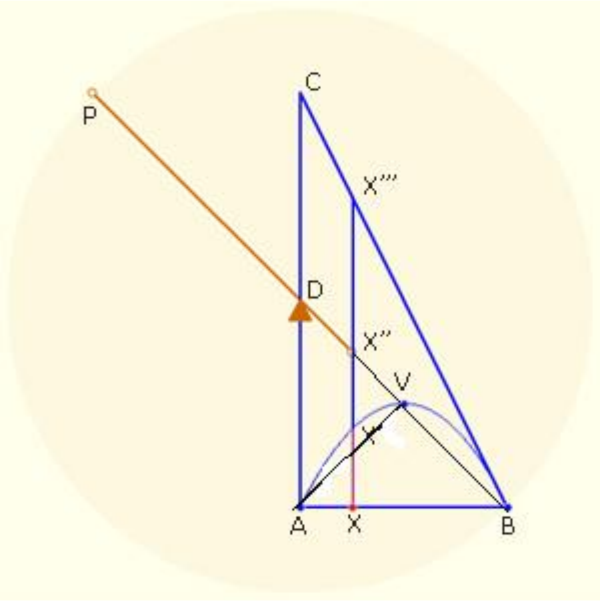


Ιδιότητα τριγώνου: τέμνουσα παράλληλη με εφαπτομένη στο C.



Μία απόδειξη ήταν Γεωμετρική. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης και υπολόγισε ένα άπειρο άθροισμα (όριο σειράς).

Απόδειξη βασισμένη στην έννοια της ισορροπίας



BC εφαπτομένη στο B,
BD=DP
Τρίγωνο ABC=4 τρίγωνο ABV
Ιδιότητες παραβολής

$$\frac{XX'''}{XX'} = \frac{AB}{AX} = \frac{BD}{DX''} = \frac{DP}{DX''}$$

Βασική ιδέα: παίρνουμε τομές και θεωρούμε ότι το τρίγωνο ABC και το κομμάτι ανάμεσα στη παραβολή και τέμνουσα AB αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα που θα ισορροπήσουμε ως προς D.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** By User:Vladislav Pogorelov, derivative of works by Pbroks13 and Jim.belk (Parabola and inscribed triangle.svg) [Public domain], via Wikimedia Commons
- **Εικόνα 2:** The method of Archimedes.
- **Εικόνα 3:** "**ArPalimTypPage**" by The Walters Museum - http://www.archimedespalimpsest.net.. Licensed under Creative Commons Attribution 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ArPalimTypPage.jpg#mediaviewer/File:ArPalimTypPage.jpg
- **Εικόνα 4:** "**ArPalimTyp2"** by The Walters Museum - archimedespalimpsest.net.. Licensed under CC BY 3.0 via Wikimedia Commons -

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ArPalimTyp2.jpg#/media/File:ArPalimTyp2.jpg

- **Εικόνα 5:** "**Esfera Arquímedes**" by Andertxuman - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Esfera_Arqu%C3%ADmedes.jpg#mediaviewer/File:Esfera_Arqu%C3%ADmedes.jpg
- **Εικόνα 6:** By User:Vladislav Pogorelov, derivative of works by Pbroks13 and Jim.belk (Parabola and inscribed triangle.svg) [Public domain], via Wikimedia Commons

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 3: Αρχιμήδης. Ενότητα 3.2: Η μέθοδος: σφαίρα και κύλινδρος». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 4: Διόφαντος και Αραβικά Μαθηματικά.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 4.1: Διόφαντος και συγκεκομμένη Άλγεβρα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Διόφαντος και συγκεκομμένη Άλγεβρα.
- Δευτεροβάθμια εξίσωση και Πυθαγόρειες τριάδες.
- Αραβικά μαθηματικά (δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή γίνεται μία εισαγωγή στο έγο του Διόφαντου και παρουσιάζεται η αλλαγή έμφασης στην επίλυση των εξισώσεων έως και τα αραβικά μαθηματικά.

Τι είναι γινόμενο? (εμβαδόν)

Στον Ευκλείδη δουλεύουμε με ομογενείς ποσότητες:

για παράδειγμα δεν μπορούμε να προσθέτουμε σε εμβαδόν (γινόμενα) διαφορετικού είδους μεγέθη όπως μήκη.

Διόφαντος ~ 3^{ος} αιώνας μ.Χ.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Εικόνα 1

Έργα του:

Αριθμητική (13 βιβλία, σώζονται 6)

Περί πολυγώνων αριθμών.

Πορίσματα.

Αριθμητική Διόφαντος



Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem rattio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

H iii

Εικόνα 2

Σε ελεύθερη μετάφραση

Παλατινή ανθολογία 8.126(6^{ος} αιώνας μ.Χ.):

Σ' ΑΥΤΟΝ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. …Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ. Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΜΑ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ. ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ, ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ. ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ, ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ. ΤΙ ΚΡΙΜΑ, ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ, ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ. ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ, Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ, ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.

$$(1/6)n + (1/12)n + (1/7)n + 5 + (1/2)n + 4 = n$$

Λύση: $n = 84$

Σύμβολα του Διόφαντου (συγκεκομμένη άλγεβρα) (1)

Διόφαντος	Σήμερα
ς	άγνωστος $\boldsymbol{x}$
Δ^{Υ}	x^2 (δύναμις)
K^{Υ}	x^3 (κύβος)
$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	x^4 (δυναμοδύναμις)
$\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$	x^5 (δυναμόκυβος)
$\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$	x^6 (κυβόκυβος)
ς^{x}	$\frac{1}{x} = x^{-1}$ (ειδικές ονομασίες για αντίστροφα)
ις	ίσος

Σύμβολα του Διόφαντου (συγκεκομμένη άλγεβρα) (2)

$\pitchfork$:= minus $\qquad \overset{\circ}{M}$:= units

$$K^{\Upsilon}\alpha\,\Delta^{\Upsilon}\iota\gamma\,\zeta\varepsilon\,\overset{\circ}{M}\,\beta = x^3 + 13x^3 + 5x + 2$$

$$K^{\Upsilon}\alpha\,\zeta\eta \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\varepsilon\,\overset{\circ}{M}\,\alpha = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

$$\Delta^{\Upsilon}\iota\varepsilon \pitchfork \overset{\circ}{M}\,\lambda\theta = 15x^2 - 39$$

Η «Αριθμητική» του Διόφαντου

Η «Αριθμητική» του Διόφαντου είναι συλλογή 150 περίπου προβλημάτων, με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα.

Από αυτή τη μελέτη:

Λείπει η συστηματική μελέτη των αλγεβρικών πράξεων και η συστηματική μελέτη επίλυσης εξισώσεων.

Δεν γίνεται προσπάθεια εύρεσης όλων των πιθανών λύσεων.

Ο Διόφαντος αναγνωρίζει μόνο τις θετικές ρητές ρίζες αν υπάρχουν δύο θετικές ρίζες, αναγνωρίζει μόνο τη μεγαλύτερη. Δεν αναγνωρίζει καθόλου τις αρνητικές λύσεις.

Στα αόριστα προβλήματα (με άπειρο αριθμό λύσεων) δίνει μόνο μία απάντηση.

Τα μεγάλα θετικά του Διόφαντου (1)

Τα μεγάλα θετικά (εκτός από τον μερικό συμβολισμό):

Ο Διόφαντος έδωσε κανόνες για μαθηματικές εκφράσεις:

- μεταφορά όρων από το ένα μέρος της εξίσωσης στο άλλο,
- ακύρωση όμοιων όρων από τις δύο πλευρές της ισότητας.

Όρισε αρνητικές δυνάμεις για τους αγνώστους και τους κανόνες για τους εκθέτες.

$$x^n x^m = x^{n+m}, -6 \leq m, n, m+n \leq 6$$

Τα μεγάλα θετικά του Διόφαντου (2)

Έδωσε κανόνες για το γινόμενα που αφορούν όρους με αρνητικούς συντελεστές: π.χ. $(-)(-) = +$

Απομάκρυνση από την γεωμετρική άλγεβρα, (οι όροι δεν χρειάζεται να είναι ομογενείς), δουλεύει με δυνάμεις μεγαλύτερες του 3.

Πρόβλημα Ι-28 (1)

Να βρεθούν δύο αριθμοί έτσι ώστε το άθροισμά τους και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι δοθέντες αριθμοί:
Λύση: Έστω το άθροισμα είναι 20 και το άθροισμα των τετραγώνων είναι 208.

Τότε έστω ότι η διαφορά των δύο αριθμών (του μεγαλύτερου από τον μικρότερο) είναι $2x$.
Το 10 είναι το μισό του πρώτου αθροίσματος.

Άρα και ο αριθμός x είναι 2 ενώ οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 8 και 12.

Πρόβλημα Ι-28 (2)

<u>Ερμηνεία (δική μας):</u> έστω z, y οι δύο αριθμοί όπου $z > y$.
Αν λοιπόν το z διαφέρει από το y κατά $2x$ τότε αφού $z + y = 20$ έχουμε ότι $2z - 2x = 20$ και άρα $z = 10 + x$, ενώ $y = 10 - x$.

Αντικαθιστούμε z και y στη σχέση των τετραγώνων και λύνουμε ως προς x.

$$208 = (x + 10)^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 + 200$$

Επομένως δύο φορές το τετράγωνο του x είναι 8 άρα x είναι 2.

Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο? (1)

(ας θυμηθούμε ότι για λύσεις αναγνωρίζει μόνο θετικούς ρητούς.)
Ξανά το γενικό πρόβλημα: να βρεθούν θετικοί ρητοί z και y έτσι ώστε

$$z + y = a, z^2 + y^2 = b$$

Μέθοδος του Διόφαντου:

$$z = \frac{a}{2} + x, y = \frac{a}{2} - x$$

Αντικατάσταση στη δεύτερη εξίσωση:

$$b = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο? (2)

Έτσι

$$b = 2\frac{a^2}{4} + 2x^2$$

και $2x^2 = b - \frac{a^2}{4}$.

άρα $x^2 = \frac{2b-a^2}{4}$ και $x = \frac{\sqrt{2b-a^2}}{2}$.

Θα έχουμε λύση (σύμφωνα με τον Διόφαντο) όταν

$$x = \frac{\sqrt{2b-a^2}}{2} \text{ είναι ρητός.}$$

Δηλαδή αν και μόνο αν $2b - a^2$ είναι τετράγωνο.

Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο? (3)

Την συνθήκη αυτή ο Διόφαντος, την δίνει αμέσως μετά την παράθεση του προβλήματος στη γενική μορφή και πριν ξεκινήσει με την λύση της συγκεκριμένης περίπτωσης:

λέει «πρέπει δύο φορές το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών μείον το τετράγωνο του αθροίσματος των αριθμών να είναι τετράγωνο.»

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$2 \times 208 - 20^2 = 4^2$$

Πότε δουλεύει αυτή η τεχνική σύμφωνα με τον Διόφαντο? (4)

Στο γενικό λοιπόν πρόβλημα των δύο εξισώσεων

$$z + y = a, z^2 + y^2 = b$$

σύμφωνα με τον Διόφαντο, οι λύσεις είναι:

$$z = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}, y = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}$$

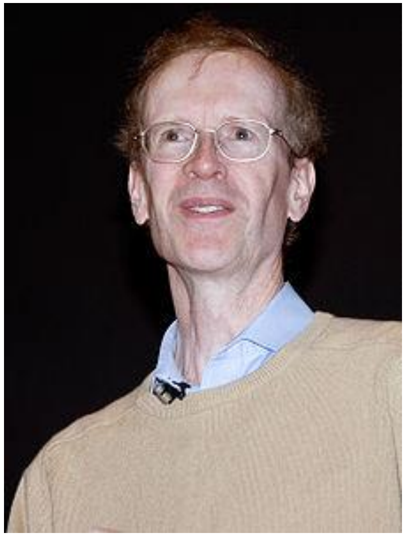
αρκεί βέβαια $2b - a * \alpha$ να είναι τετράγωνο!

Παρατήρηση: Δεν υπάρχει γεωμετρική μεθοδολογία στις μεθόδους του Διόφαντου.

Το τελευταίο θεώρημα του Fermat (1993,1995)



$$a^n + b^n = c^n$$



Εικόνα 3

Pierre de Fermat (1601 -1665)

Εικόνα 4

Sir Andrew John Wiles (1953--)

Η μαθηματική τέχνη

Ας παύση η πραγματεία των μαθηματικών. Διότι εάν τις δημοσία ή κατ' ιδίαν, καθ' ημέραν ή νύκτωρ συλληφθή αναστρεφόμενος εν τη απαγορευμένη πλάνη, αμφότεροι ας πληγούν δια κεφαλικής ποινής. Διότι δεν είναι διάφορον αμάρτημα το διδάσκεσθαι κεκωλυμένα ή το διδάσκειν». Κώδιξ Θεοδοσιανός (Ουαλεντιανού και Ουάλεντος), IX, 16, 8. (438μ.Χ.)

«*Οι μαθηματικοί, εάν μή ώσιν έτοιμοι, καυθέντων των κωδίκων της ιδίας πλάνης υπό τα όμματα των Επισκόπων, να δώσουν πίστιν εις την λατρείαν της καθολικής πίστεως, ότι δεν θα επανέλθουν εις την παλαιάν πλάνην, ου μόνον από της πόλεως Ρώμης, αλλά και εκ πασών των πόλεων αποφασίζομεν να εκδιωχθούν. Εάν δε δεν κάμνουν τούτο και παρά την σωτηρίαν απόφασιν της ημετέρας επιεικείας, συλληφθούν εν ταις πόλεσιν· είτε παρεισάγουν τα μυστικά της πλάνης, θα τύχωσι της ποινής της εξορίας*». Αυτοκράτορες Ονώριος και Θεοδόσιος προς τον Καικιλιανό Ύπαρχο.

«*Η μαθηματική τέχνη αξιόποινος ούσα απαγορεύεται*». Ιουστινιάνειος Κώδιξ, IX, 18, 2.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Diophantus-cover**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-cover.jpg#mediaviewer/File:Diophantus-cover.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Diophantus-II-8-Fermat**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg#mediaviewer/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 3**: "**Pierre de Fermat**" by This file is lacking author information. - http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.jpg#mediaviewer/File:Pierre_de_Fermat.jpg
- **Εικόνα 4**: "**Andrew wiles1-3**" by "copyright C. J. Mozzochi, Princeton N.J" - http://www.mozzochi.org/deligne60/Deligne1/_DSC0024.jpg. Via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andrew_wiles1-3.jpg#mediaviewer/File:Andrew_wiles1-3.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 4: Διόφαντος και Αραβικά Μαθηματικά. Ενότητα 4.1: Διόφαντος και συγκεκομμένη Άλγεβρα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 4: Διόφαντος και Αραβικά Μαθηματικά.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 4.2: Δευτεροβάθμια εξίσωση και Πυθαγόρειες τριάδες.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Διόφαντος και συγκεκομμένη Άλγεβρα.
- Δευτεροβάθμια εξίσωση και Πυθαγόρειες τριάδες.
- Αραβικά μαθηματικά (δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή γίνεται μία εισαγωγή στο έγο του Διόφαντου και παρουσιάζεται η αλλαγή έμφασης στην επίλυση των εξισώσεων έως και τα αραβικά μαθηματικά.

Ερωτήματα

Τι είναι αριθμητική?

Τι είναι Άλγεβρα?

Είναι Άλγεβρα η «Γεωμετρική Άλγεβρα»?

Έκανε ο Διόφαντος Άλγεβρα?

Ασχολήθηκαν με Άλγεβρα οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι?

Πολυωνυμικές εξισώσεις και Βαβυλωνία (1)

Να βρεθεί το **μήκος** και το **πλάτος** έτσι ώστε η περίμετρος να είναι 13 και το εμβαδόν 7 ½ :



Εικόνα 1

Διαδικασία:

βρες το μισό του 13: 6 ½
βρες το μισό του 6 ½ : 3 ¼
βρες (3 ¼) (3 ¼): 10 9/16
αφαίρεσε 7 ½: 3 1/16
πάρε τη (τετραγωνική)ρίζα: 1 ¾
μήκος: 3 ¼ +1 ¾ =5
πλάτος: 3 ¼-1 ¾ =1 ½

<--19ος -17ος π.Χ.

YBC 4663

Πολυωνυμικές εξισώσεις και Βαβυλωνία (2)

Αν x, y είναι το μήκος και το πλάτος τότε θέλουμε να λύσουμε τις εξισώσεις:

$$x + y = 61/2, xy = 7\ 1/2$$

$$y = 6\frac{1}{2} - x, x\left(6\frac{1}{2} - x\right) = 7\frac{1}{2}$$

$$-x^2 + 6\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 6\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(6\frac{1}{2}\right)^2 - 4 * 7\frac{1}{2}}}{2} = \frac{6\frac{1}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6\frac{1}{2}}{2}\right)^2 - 7\frac{1}{2}}$$

Οδηγίες:

το μισό του 6 ½ : 3 ¼

(3 ¼) (3 ¼): 10 9/16

μείον ½: 3 1/16

(τετραγωνική) ρίζα: 1 ¾

μήκος: 3 ¼ +1 ¾ =5

πλάτος: 3 ¼-1 ¾ =1 ½

Πολυωνυμικές εξισώσεις και Βαβυλωνία (3)

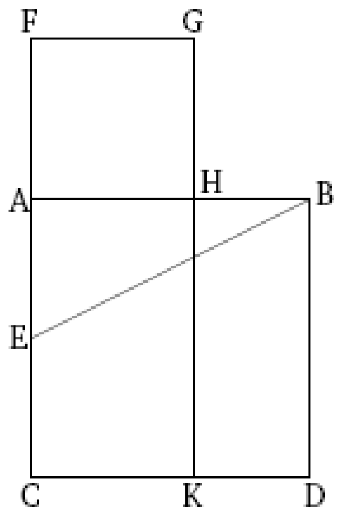
Το πρόβλημα με την περίμετρο και εμβαδό αντιστοιχεί στην εύρεση λύσης μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής

$$x^2 = bx + c, b > 0, c > 0$$

Σε άλλη πλάκα υπάρχει παράδειγμα εύρεσης λύσης της εξίσωσης

$$7x + 11x^2 = 6\frac{1}{4}$$

Ευκλείδης, βιβλίο 2. 1, Στοιχεία



Να διαιρεθεί δοθέν τμήμα ώστε το ορθογώνιο που ορίζει το τμήμα και το ένα μέρος του να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το άλλο μέρος.

$$a(a-x)=x^2$$

AB=α

Λύση: $x = AF$ όπου AE είναι ίσο ½ AB και EF=EB.

Διόφαντος ~ τρίτος αιώνας μ.Χ.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Εικόνα 2

3 τύποι δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Ο Διόφαντος εξέτασε και τους 3 τύπους δευτεροβάθμιων εξισώσεων όπου $\boldsymbol{a, b, c > 0}$:

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 = bx + c$$

$$ax^2 + c = bx$$

Πρόβλημα Ι-28

Να βρεθούν δύο αριθμοί έτσι ώστε το άθροισμά τους και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι δοθέντες αριθμοί:

$$z + y = a, z^2 + y^2 = b$$

Συνθήκη του Διόφαντου για να έχει λύση το πρόβλημα:

«πρέπει δύο φορές το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών μείον το τετράγωνο του αθροίσματος των αριθμών να είναι τετράγωνο.»

Διόφαντος ΙΙ



Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

H iii

Εικόνα 3

Γενικό πρόβλημα: Να διαιρέσεις τετράγωνο σε δύο τετράγωνα.


Arithmeticorum Lib. II. 85

terusllo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 - 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. - 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. - 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 - 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. 16/5. Erit igitur alter quadratorum 256/25. alter verò 144/25. & vtriusque summa est 400/25 seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Εικόνα 4

Γενικό πρόβλημα: Να διαιρέσεις τετράγωνο σε δύο τετράγωνα.

Ειδικό πρόβλημα: Να διαιρέσεις το 16 σε δύο τετράγωνα.

Πρόβλημα της διαίρεσης του 16 σε δύο τετράγωνα (1)

Πίσω στον Διόφαντο και στο πρόβλημα της διαίρεσης του 16 σε δύο τετράγωνα.

Ο Διόφαντος δίνει τις παρακάτω οδηγίες:

Έστω x^2 το πρώτο τετράγωνο.

Αυτό που απομένει είναι $16 - x^2$.

Πρέπει να είναι τετράγωνο και αυτό.

Παίρνω το τετράγωνο της διαφοράς ενός οποιοδήποτε πολλαπλασίου του x μείον 4.

Πρόβλημα της διαίρεσης του 16 σε δύο τετράγωνα (2)

Για παράδειγμα έστω το τετράγωνο του $2x - 4$:

Τότε $(2x-4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x$.

και

$$(2x-4)^2 = 16 - x^2$$

Τελικά

$$5x^2 = 16x \text{ άρα } x = 16/5.$$

Το ένα τετράγωνο είναι $256/25$ και το άλλο είναι $144/25$.

Πρόβλημα της διαίρεσης του 16 σε δύο τετράγωνα (3)

Γιατί ο Διόφαντος διαλέγει το δεύτερο τετράγωνο να είναι της μορφής $(mx-4)^2$

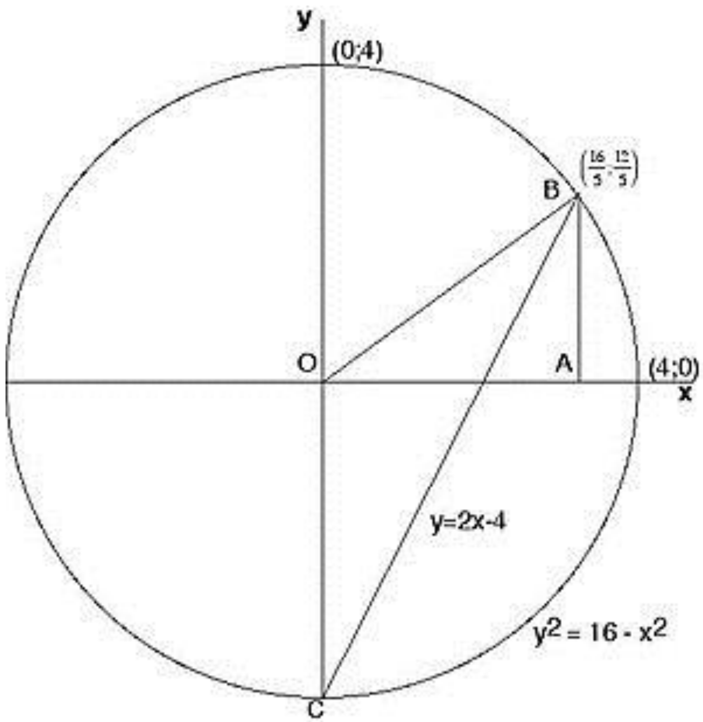
Αν $m=2$ τότε η λύση είναι $\mathrm{x} = 256/25$, $\mathrm{y} = 144/25$

Αν $m=4$ τότε η λύση είναι $\mathrm{x} = 1024/289$, $\mathrm{y} = 3600/289$ --

Ο Διόφαντος στην ουσία λέει ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις (και δίνει τρόπο εύρεσης Πυθαγορείων τριάδων).

Ποια είναι η γενική μέθοδος? Αν το αρχικό τετράγωνο ήταν c^2 πως θα βρίσκαμε τα δύο τετράγωνα?

Σημερινή Γεωμετρική ερμηνεία:



Ο κύκλος

$$y^2 = 16 - x^2$$

και η ευθεία

$$y = 2x - 4$$

τέμνονται σε δύο σημεία.

Το ένα σημείο τομής βρίσκεται στον άξονα των y $(x = 0)$. Το άλλο σημείο τομής έχει για x-συντεταγμένη την τιμή που ψάχνουμε.

«Αριθμητική» Βιβλίο 4

«Αριθμητική» Βιβλίο 4: (Ο Διόφαντος αναφέρεται σε Πρόταση από το βιβλίο Πορίσματα, όπου εννοείται ότι είναι η απόδειξη)

Αριθμοί της μορφής $4n + 3$ δεν μπορεί να είναι άθροισμα τετραγώνων (έχει η πρόταση αυτή απόδειξη με τα εργαλεία του Διόφαντου?)

Μετάφραση της «Αριθμητικής»

Μέρος της «Αριθμητικής» αντιγράφηκε από τους Βυζαντινούς λόγιους,

(σχόλιο από Ιωάννη τον Χορτασμένο τον 14ο αιώνα)

Μεταφράστηκε στα Αραβικά τον 10ο αιώνα.

Το 1463 ο Regiomontanus αναφέρει ότι δυστυχώς η "Αριθμητική» δεν έχει ακόμα μεταφραστεί στα Λατινικά.

Μετάφραση του Bombelli 1570, (χρησιμοποίησε προβλήματα στο βιβλίο του Άλγεβρα).

Πιο γνωστή μετάφραση του Bachet 1621 (Fermat).

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: http://isaw.nyu.edu//exhibitions/before-pythagoras/
- **Εικόνα 2**: "**Diophantus-cover**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-cover.jpg#mediaviewer/File:Diophantus-cover.jpg
- **Εικόνα 3 και 4:** "**Diophantus-II-8-Fermat**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg#mediaviewer/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 4: Διόφαντος και Αραβικά Μαθηματικά.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 4.3: Αράβικα Μαθηματικά (δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Διόφαντος και συγκεκομμένη Άλγεβρα.
- Δευτεροβάθμια εξίσωση και Πυθαγόρειες τριάδες.
- Αραβικά μαθηματικά (δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εξίσωση), Fibonacci.

Σκοποί Ενότητας

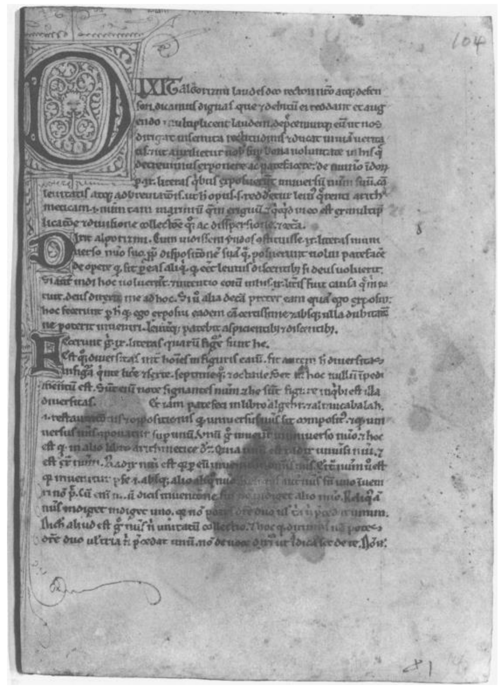
- Στην ενότητα αυτή γίνεται μία εισαγωγή στο έργο του Διόφαντου και παρουσιάζεται η αλλαγή έμφασης στην επίλυση των εξισώσεων έως και τα αραβικά μαθηματικά.

al-Khwārizmī (780-850) Ιράκ



Εικόνα 1

Kitāb al-Jam wa-l-tafrīq bi-ḥisāb al-Hind (λατινικά *Dixit algorizm*)~825



Εικόνα 2

al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala



Εικόνα 3

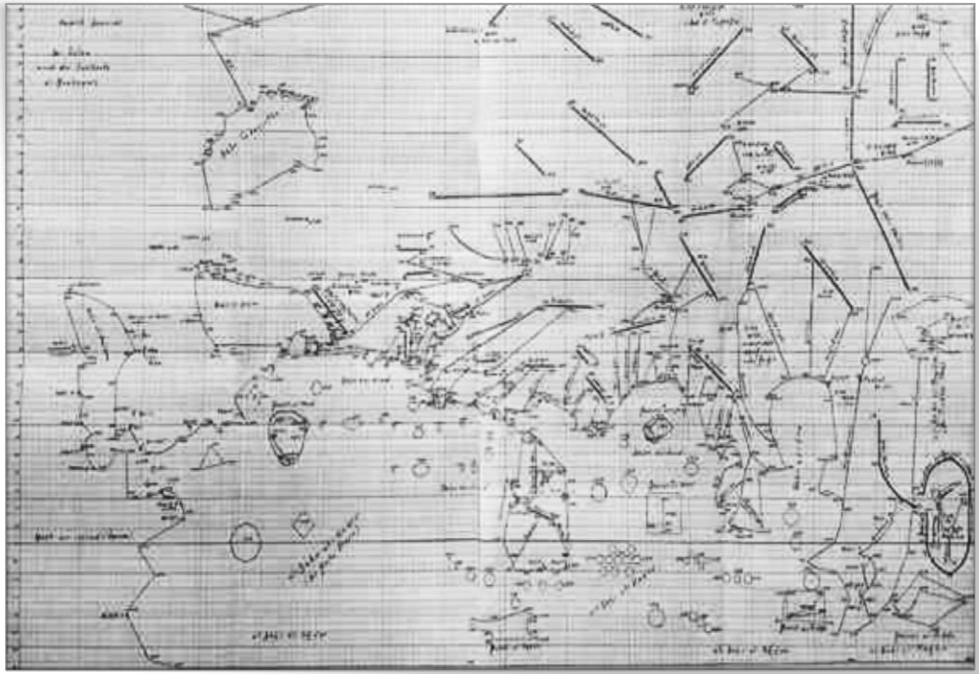
al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala
الكتاب

المختصر في حساب الجبر والمقابل ~830

al-jabr: αποκατάσταση—συμπλήρωση

Mugabala: ελάττωση---εξισορρόπηση

Χάρτης του al-Kwarizmi



Εικόνα 4

Χάρτης του al-Kwarizmi (και γεωγράφος)

Αλλαγή έμφασης (στην επίλυση δευτεροβάθμιων)

Αλλαγή έμφασης (στην επίλυση δευτεροβάθμιων):

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί αριθμός (οί) που να ικανοποιεί (ούν) κάποιες συνθήκες και όχι ακμές τετραγώνων.

Σε κάποιες περιπτώσεις ο **al-Khwārizmī** δέχεται δύο (θετικές) λύσεις σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Συγκρίνοντας το γραπτό του με του Διόφαντου παρατηρούμε ότι δίνει γεωμετρικού τύπου αποδείξεις.

Παράδειγμα: Ποιό πρέπει να είναι το τετράγωνο που όταν το προσθέσεις σε 10 από τις ρίζες του θα γίνει 39?

Διαιρείς τον αριθμό των ριζών και παίρνεις 5.

Αυτό το πολλαπλασιάζεις με τον εαυτό του και το γινόμενο είναι 25.

Προσθέτεις σε αυτό 39.

Το αποτέλεσμα είναι 64.

Παίρνεις της ρίζα του που είναι 8.

Αφαιρείς το μισό του αριθμού των ριζών που είναι 5, το υπόλοιπο είναι 3.

Αυτή είναι η ρίζα που ζητούσες.

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + bx = c, b, c > 0$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

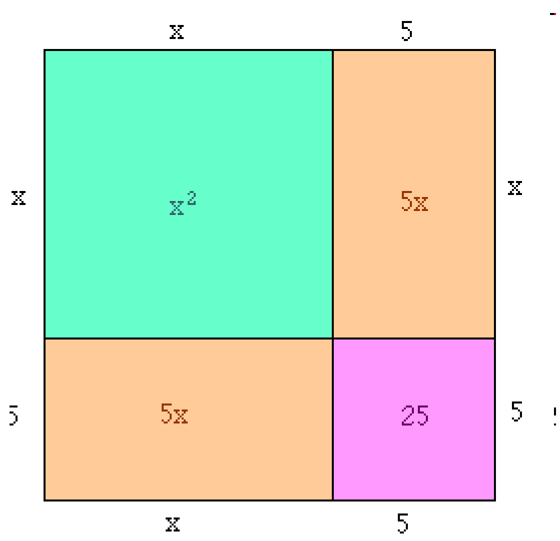
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{\mathrm{b}}{2}$$

Ρητορική προσέγγιση (1)

Πλήρωση του τετραγώνου: (απόδειξη για $x^2 + 10x = 39$)



$$x^2 + 10x = 39$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}$$

Ρητορική προσέγγιση (2)

Για κάθε μορφή πολυωνυμικής εξίσωσης βαθμού 2 δίνεται διαφορετική λύση και απόδειξη.

Στις μορφές αυτές ο al-Kwarizmi δεν δέχεται αρνητικούς συντελεστές.

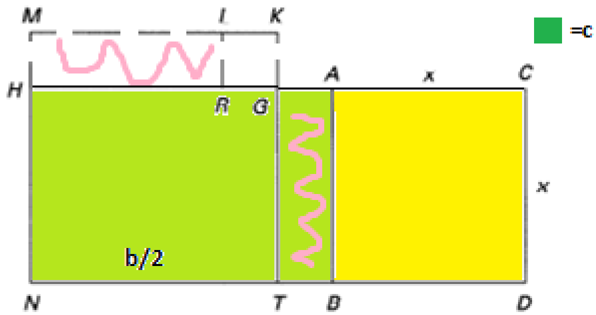
Οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές, ενώ το 0 δεν είναι λύση.

Για τη λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής

$$x^2 + c = bx$$

χρησιμοποιεί την παρακάτω γεωμετρική κατασκευή.

Γεωμετρική κατασκευή



$\mathrm{N}D = b, BD = x, NT = b/2$

Άρα

KIRG είναι τετράγωνο με ακμή

$$b/2 - x$$

και εμβαδόν $(b/2)2 - c$.

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

Ερωτήματα

Έμπνευση του al-Kwarizmi από αρχαίους Βαβυλώνιους, Διόφαντο και Ευκλείδη.

Είναι όμως οι αποδείξεις του al-Kwarizmi, του ιδίου «τύπου» όπως του Ευκλείδη?

O al-Kwarizmi δεν έγραφε εξισώσεις.

Χρησιμοποιούσε ο al-Kwarizmi το ΙνδοΑραβικό σύστημα?

Παράδειγμα από το κείμενο του Abu Kamil (1/2)

Παράδειγμα από το κείμενο του Abu Kamil.

(Αίγυπτος: ~850-930 μ.Χ.)

Σε ένα πρόβλημα υπολογίζει πως να χωρίσει κανείς το 10 σε δύο μέρη, έτσι ώστε όταν το ένα μέρος πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του, το άλλο με τη ρίζα του 8, και αφαιρείται από το πρώτο γινόμενο το δεύτερο, το αποτέλεσμα είναι 40.

Παράδειγμα από το κείμενο του Abu Kamil (2/2)

Μετά από πράξεις δίνει την απάντηση: Το μέρος είναι 10 και ρίζα 2 αφαιρώντας ρίζα του αθροίσματος του 42 και της ρίζας του 800, ενώ το άλλο μέρος είναι …

** ο Kamil χρησιμοποιεί με άνεση ριζικά μη ρητών**

$$10+\sqrt{2}-\sqrt{42+\sqrt{800}}$$

Παράδειγμα από το κείμενο του Abu Kamil (Αίγυπτος: ~850-930 μ.Χ.)

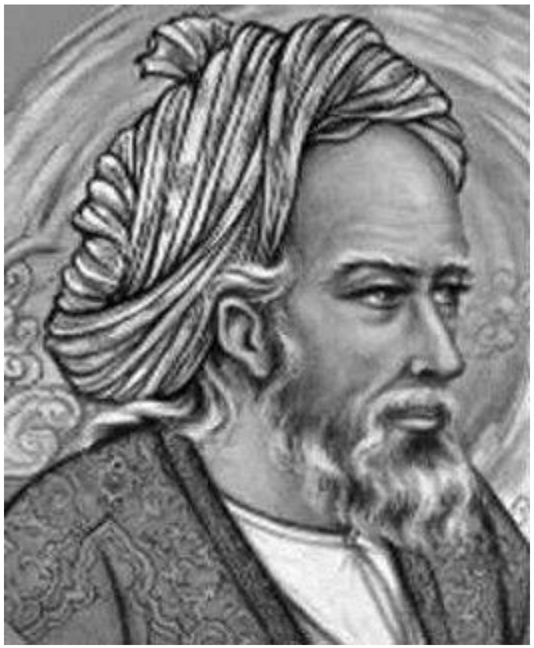
Σε ένα πρόβλημα υπολογίζει πως να χωρίσει κανείς το 10 σε δύο μέρη, έτσι ώστε όταν το ένα μέρος πολλαπλασιά- ζεται με τον εαυτό του, το άλλο με τη ρίζα του 8, και αφαιρείται από το πρώτο γινόμενο το δεύτερο, το αποτέλεσμα είναι 40.

Μετά από πράξεις δίνει την απάντηση: Το μέρος είναι 10 και ρίζα 2 αφαιρώντας ρίζα του αθροίσματος του 42 και της ρίζας του 800, ενώ το άλλο μέρος είναι…

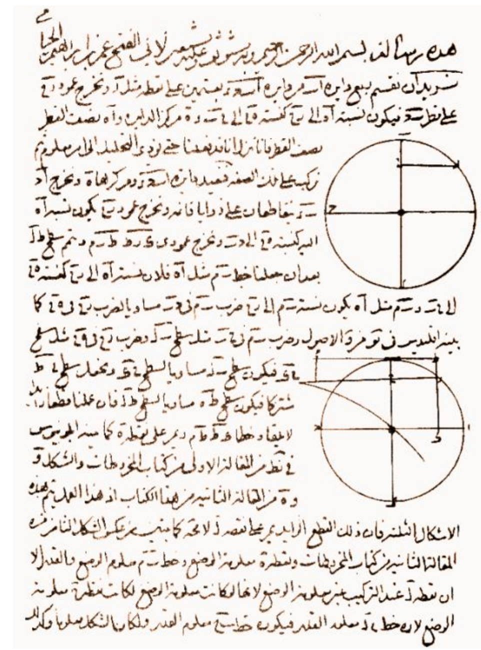
** ο Kamil χρησιμοποιεί με άνεση ριζικά μη ρητών**

$$10+\sqrt{2}-\sqrt{42+\sqrt{800}}$$

Omar Khayyam (Περσία) (1048-1131)



Εικόνα 5



Εικόνα 6

Παρένθεση: παραβολές

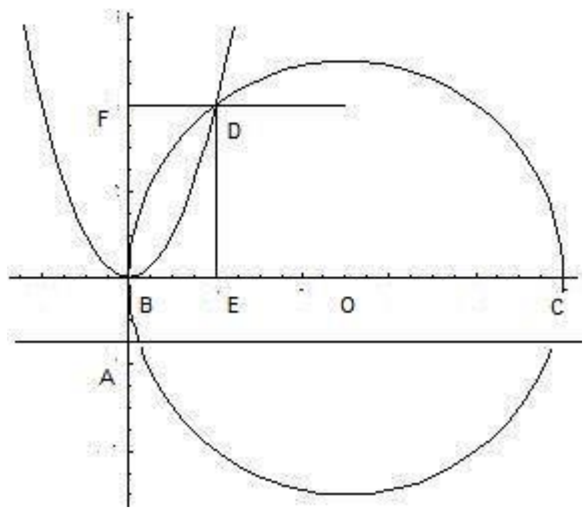
Ο Ιπποκράτης ο Χίος (περ. 430 π.Χ.).

Μέναιχμος (περ. 350 π.Χ.) για τον διπλασιασμό του κύβου.

Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.) (κωνικές τομές---εμβαδό παραβολικού τμήματος).

«Κωνικά» του Απολλώνιου (περ. 250 π.Χ.)(όροι παραβολή, έλλειψη, υπερβολή).

Khayyam: λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης



Κύβος και c ρίζες να είναι d.
Έστω ο κύκλος με κέντρο O και διάμετρο d/c.
Έστω η παραβολή με κορυφή B, άξονα κάθετο στο CB και διευθετούσα στο A
όπου AB=(τετραγωνική) ρίζα $c/4$.
Αν D είναι το σημείο τομής του ημικυκλίου και της παραβολής τότε BE είναι η λύση.

$x^3 + cx = d$

Σημερινή ερμηνεία: αναλυτικές εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής που περιγράφονται στη λύση του Khayyam (ο κύκλος με κέντρο στο $(d/2c, 0)$).

$$\left(x - \frac{d}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2c}\right)^2 \qquad x^2 = \sqrt{c}y$$

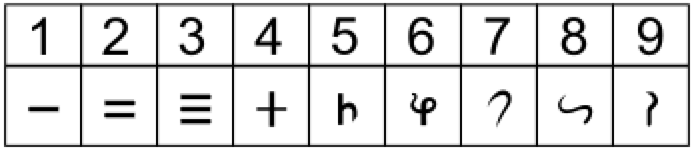
Έστω (x_0, y_0) οι συντεταγμένες του σημείου τομής. Τότε αντικαθιστώντας στις δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$\left(x_0 - \frac{d}{2c}\right)^2 + y_0^2 = \left(\frac{d}{2c}\right)^2 \Rightarrow x_0\left(\frac{d}{c} - x_0\right) = y_0^2$$

$$x_0^2 = \sqrt{c}y_0 \Rightarrow x_0^4 = cy_0^2, x_0^4 = cx_0\left(\frac{d}{c} - x_0\right) \Rightarrow x_0^3 = d - cx_0$$

Ινδο-Αραβικό αριθμητικό σύστημα

Ινδο-Αραβικό αριθμητικό σύστημα



Εικόνα 7

Modern Devanagari	Hindu–Arabic
०	0
१	1
२	2
३	3
४	4
५	5
६	6
७	7
८	8
९	9

Εικόνα 8

Aryabhata (476–550 μ.Χ.) (Ινδία)

Το βιβλίο του «Aryabhatiya» είναι σε μαθηματικά (αριθμητική, άλγεβρα, τριγωνομετρία, σφαιρική τριγωνομετρία, δευτεροβάθμιες εξισώσεις, συνεχή κλάσματα, αριθμητικές σειρές, πίνακες ημιτόνων) και αστρονομία.



Εικόνα 9

Το μηδέν και η ιστορία του

Το μηδέν ως ψηφίο και ως αριθμός:

Κεντρική Αμερική ~ 36 π.Χ. (ψηφίο)

Πτολεμαίος ~130 μ.Χ. (ψηφίο +αριθμός)

Ινδία ~ 460 μ.Χ. (δεκαδική βάση+ σύστημα θέσης+κωδικοποιημένη μορφή 10 ψηφίων)

al-Kwarizmi ~825

Ευρώπη $12^{ο}$ αιώνα (όπως και τα άλλα Ινδο- αραβικά σύμβολα με το Liber abaci

(δεν υπάρχει χρόνος 0)

Κλαύδιος Πτολεμαίος (85-165) Αλεξάνδρεια



Εικόνα 10

«Η μεγάλη σύνταξις της Αστρονομίας γνωστή ως η «Μεγίστη» και από τα Αραβικά ως «almagest».

(τριγωνομετρικοί πίνακες+Ίππαρχος)
360^o μοίρες για τον κύκλο

«Γεωγραφία» (μήκος και πλάτος) και ο Κολόμβος.

Leonardo Fibonacci 1170-1250

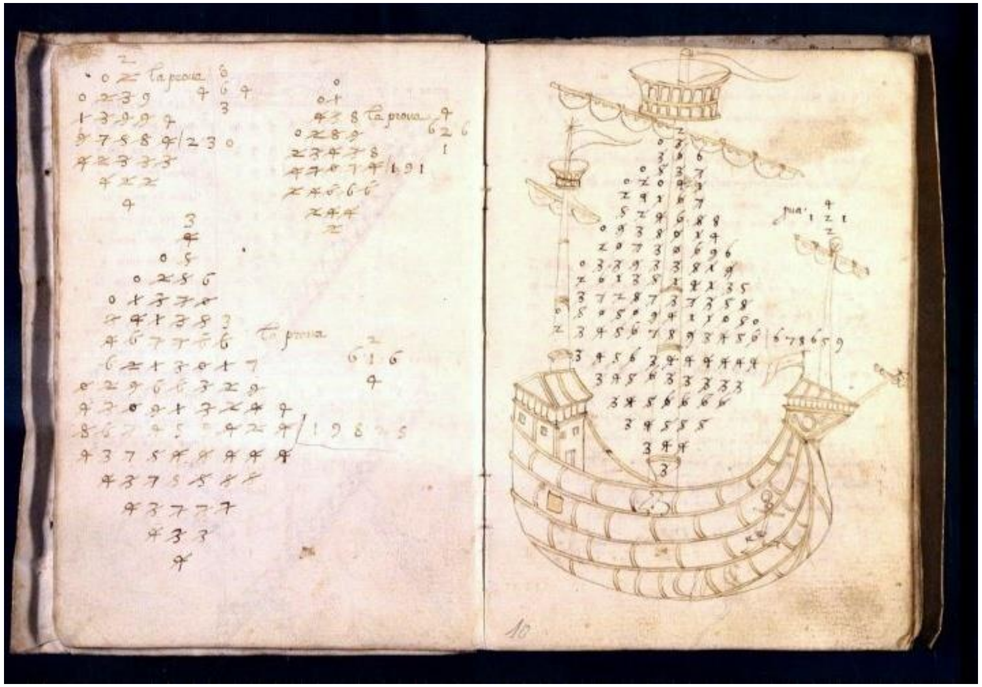


Εικόνα 11

Γιός του Bonaccio

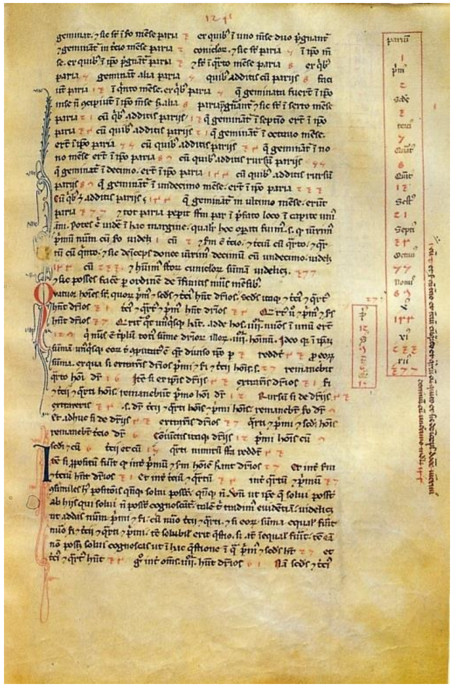
Ινδοαραβικά ψηφία και Δύση

Liber abaci (1202)



Εικόνα 12a

Liber abaci (το βιβλίο των υπολογισμών) (0-9 + σύστημα θέσης)



Εικόνα 12b

Η ακολουθία του Fibonacci (1)

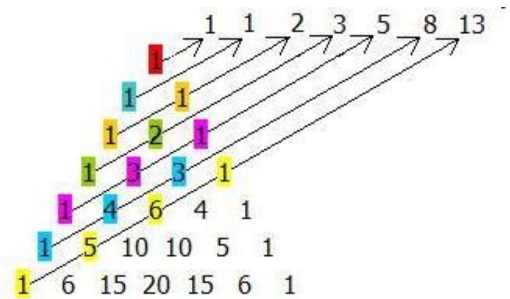
Η ακολουθία του Fibonacci σχηματίζεται από το εξής πρόβλημα, (Liber Abaci) :

«πόσα ζευγάρια κουνέλια θα έχουμε σε ένα χρόνο, αν ξεκινήσουμε με ένα ζευγάρι, και αν κάθε μήνα το κάθε ζευγάρι γεννά ένα καινούριο, που αρχίζει να αποκτά δικούς του απογόνους από το δεύτερο μήνα και μετά?»

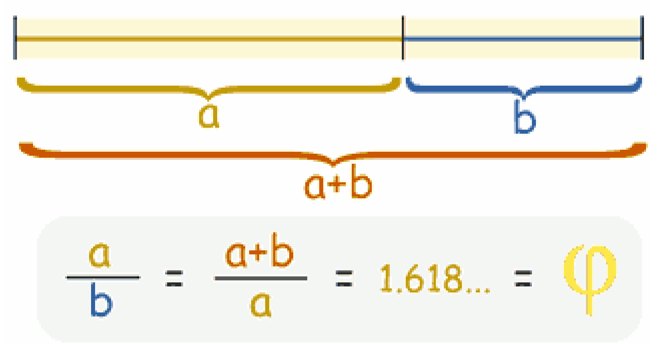
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Τρίγωνο του Pascal+ ακολουθία Fibonacci



Ακολουθία του Fibonacci και η χρυσή τομή



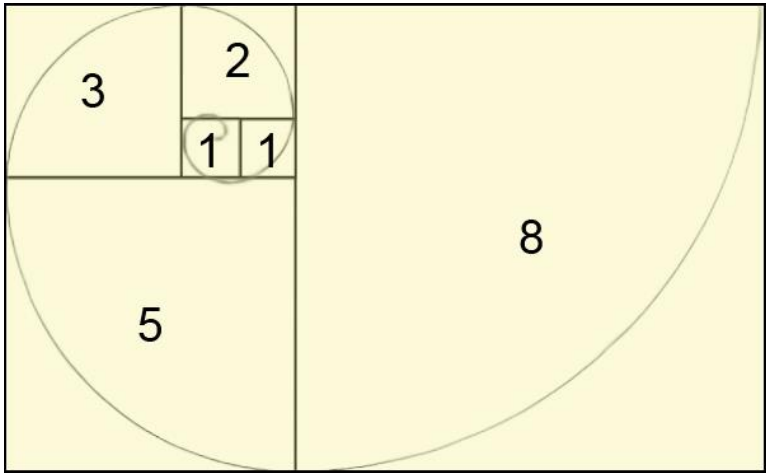
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$$

$$F(n) = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\varphi^n - (-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi$$

Η ακολουθία του Fibonacci (2)



Εικόνα 13

Ηλιοτρόπιο + ακολουθίες Fibonacci



Εικόνα 14

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/6)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "1983 CPA 5426 (1)" by Unknown - http://www.muslimheritage.com/topics/default.cfm?ArticleID=631, [1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:1983_CPA_5426_(1).png#mediaviewer/File:1983_CPA_5426_(1).png
- **Εικόνα 2**: "**Dixit algorizmi**" by Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi - scanned from facsimile (1963). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dixit_algorizmi.png#mediaviewer/File:Dixit_algorizmi.png

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/6)

- **Εικόνα 3**: **Image-Al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala**" by Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi - John L. Esposito. The Oxford History of Islam. Oxford University Press. ISBN 0195107993.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image-Al-Kit%C4%81b_al mu%E1%B8%ABta%E1%B9%A3ar_f%C4%AB_%E1%B8%A5is%C4%81b_al -%C4%9Fabr_wa-l-muq%C4%81bala.jpg#mediaviewer/File:Image-Al-Kit%C4%81b_al-mu%E1%B8%ABta%E1%B9%A3ar_f%C4%AB_%E1%B8%A5is%C4%81b_al -%C4%9Fabr_wa-l-muq%C4%81bala.jpg
- **Εικόνα 4**: "**Al-Khwarizmi's map**". Via Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/File:Al-Khwarizmi%27s_map.png#mediaviewer/File:Al-Khwarizmi%27s_map.png

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/6)

- **Εικόνα 5**: "**Ömer Hayyam**" by Unknown - http://www.kentedair.com/2012/11/26/matrakci-nasuh-kimdir/. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:%C3%96mer_Hayyam.jpg#mediaviewer/File:%C3%96mer_Hayyam.jpg
- **Εικόνα 6**: "**Khayyam-paper-1stpage**". Via Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/File:Khayyam-paper-1stpage.png#mediaviewer/File:Khayyam-paper-1stpage.png
- **Εικόνα 7**: "Indian numerals 100AD". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indian_numerals_100AD.svg#mediaviewer/File:Indian_numerals_100AD.svg
- **Εικόνα 8**: http://en.wikipedia.org/wiki/Indian_numerals

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/6)

- **Εικόνα 9**: "2064 **aryabhata-crp"** by This file is lacking author information. - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:2064_aryabhata-crp.jpg#mediaviewer/File:2064_aryabhata-crp.jpg
- **Εικόνα 10**: "**Ptolemy 16century**" by User:Stahlkocher - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ptolemy_16century.jpg#mediaviewer/File:Ptolemy_16century.jpg
- **Εικόνα 11**: "**Fibonacci**" by unknown medieval artist - Scan from "Mathematical Circus" by Martin Gardner, published 1981. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fibonacci.jpg#mediaviewer/File:Fibonacci.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/6)

- **Εικόνα 12a:** http://imgarcade.com/1/liber-abaci/
- **Εικόνα 12b:** "**Liber abbaci magliab f124**r". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg#mediaviewer/File:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg
- **Εικόνα 13:** "**AureaFibonacci**" di Original uploader was Valerio.b at it.wikipedia - Transferred from it.wikipedia. Con licenza Creative Commons Attribution 3.0 tramite Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:AureaFibonacci.jpg#mediaviewer/File:AureaFibonacci.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/6)

- **Εικόνα 14:**"**Helianthus whorl**" di L. Shyamal - Opera propria. Con licenza Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 tramite Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helianthus_whorl.jpg#mediaviewer/File:Helianthus_whorl.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5.1: Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

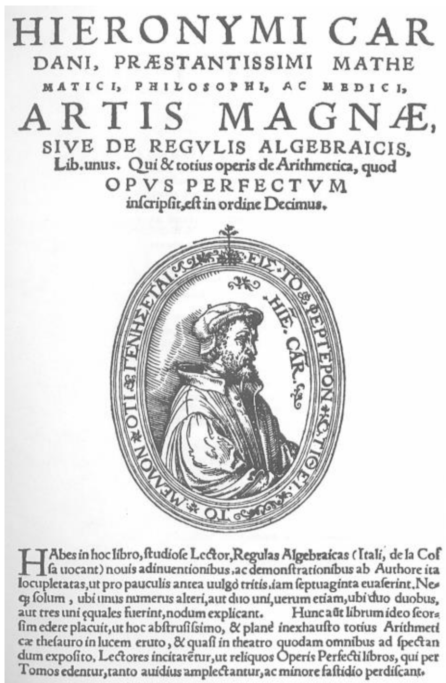
Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.
- Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
- Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.
- Viete, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.
- Ο καιρός των λογαρίθμων.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ιστορία και οι συλλογισμοί που οδήγησαν στους τύπους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Γίνεται μία σύντομη μνεία στους συμβολισμούς του Viete και στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την επίλυση των τριτοβάθμιων. Δίνεται επίσης μία εισαγωγή στην ιστορία των λογαρίθμων.

Cardano, Η Μεγάλη Τέχνη, Για τους Κανόνες της Άλγεβρας (1545)



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Εικόνα 1

Περιλαμβάνει την επίλυση της κυβικής και τεταρτοβάθμιας εξίσωσης.

Διαμάχη Cardano-Tartaglia

Ο Cardano παραδέχεται ότι την υπόδειξη για την λύση της τριτοβάθμιας της πήρε από τον Tartaglia (1500-1557) ενώ η λύση της τεταρτοβάθμιας οφείλεται στον γραμματέα του τον Ferrari(1522-1565).

Την λύση στην τριτοβάθμια την είχε ανακαλύψει ο del Ferro (1425-1526) χωρίς να την δημοσιεύσει και την εκμυστηρεύθηκε στον μαθητή του τον Fior.

Στη μαθηματική μονομαχία το 1535 των Fior-Tartaglia νίκησε συντριπτικά ο Tartaglia. Έτσι κίνησε το ενδιαφέρον του Cardano. Το 1539 έπεισε τον Tartaglia να του πει τον τρόπο και ορκίστηκε να μην το φανερώσει.

Tartaglia (1500-1557)



Εικόνα 2

Ο τύπος των εξισώσεων που μπορούσε να λύσει ο Fior

↓

$$x^3 + cx = d$$

Ο Tartaglia μπορούσε να λύσει επιπρόσθετα και αυτές

↓

$$x^3 + ax^2 = b$$

«Κύβος και πρώτη δύναμη ισούνται αριθμό»

$$x^3 + cx = d$$

«Κύβος και πρώτη δύναμη ισούνται αριθμό»

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

Εφαρμογή όταν το c=6, d=20

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

$$x^3 + 6x = 20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Άσκηση: Να δείξετε ότι 2 είναι ίσο με τη παραπάνω ποσότητα.

Ρίζες αρνητικών αριθμών: μέθοδος σοφιστείας

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$x = 4$ είναι ρίζα του πολυωνύμου! Το παραπάνω τι είναι?

Άσκηση: Να δείξετε ότι 4 είναι ίσο με την παραπάνω ποσότητα.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**ArsMagna**" by JCSantos - Own work. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ArsMagna.jpg#mediaviewer/File:ArsMagna.jpg
- **Εικόνα 2:** "**Niccolò Tartaglia**" by Original uploader was Magnus Manske at en.wikipedia - Originally from en.wikipedia; description page is/was here.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Niccol%C3%B2_Tartaglia.jpg#mediaviewer/File:Niccol%C3%B2_Tartaglia.jpg

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5.2: Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

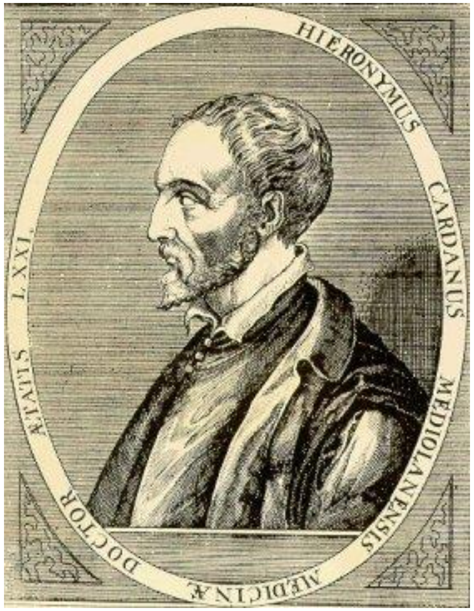
Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.
- Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
- Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.
- Viete, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.
- Ο καιρός των λογαρίθμων.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ιστορία και οι συλλογισμοί που οδήγησαν στους τύπους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Γίνεται μία σύντομη μνεία στους συμβολισμούς του Viete και στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την επίλυση των τριτοβάθμιων. Δίνεται επίσης μία εισαγωγή στην ιστορία των λογαρίθμων.

Girolamo Cardano (1501 – 1576) Μιλάνο (γιατρός-μαθηματικός)



Εικόνα 1

Ars Magna (1545)

Λύση τριτοβάθμιας (1)

$$x^3 + cx = d$$

«Κύβος και πρώτη δύναμη ισούνται αριθμό»

Λύση του Cardano

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

Η τιμή αυτή για το x είναι πάντα θετικός αριθμός.

Λύση τριτοβάθμιας (2)

$x^3 + cx = d$: Εφαρμογή όταν το $c = 6, d = 20$

$$x^3 + 6x = 20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Ο Cardano σημειώνει ότι η παραπάνω ποσότητα πρέπει να είναι ίση με 2.

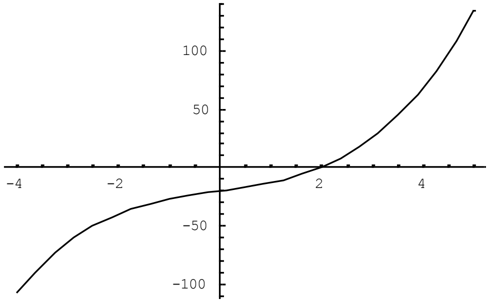
Λύση τριτοβάθμιας (3)

$$x^3 + 6x = 20 \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Οι τιμές του x που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3 + 6x = 20$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου →

$$x^3 + 6x - 20 = $$
$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 10)$$

Το γράφημα του $y = x^3 + 6x - 20$ με Mathematica →



Πως προκύπτει αλγεβρικά ο τύπος του Cardano

$$x^3 + cx = d$$

Έστω ότι u, v ώστε $u - v = d$, $\qquad uv = \left(\frac{c}{3}\right)^3$

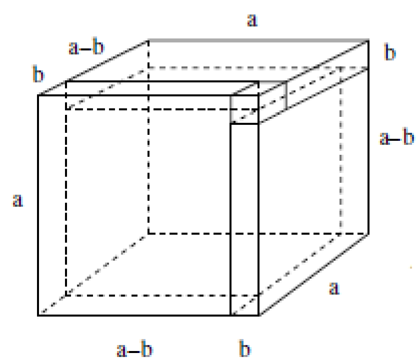
Τότε $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ είναι ρίζα για $x^3 + cx = d$

Πράγματι $c = 3\sqrt[3]{uv}$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x^3 + cx &= (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + c(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= \left(u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v\right) + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= u - v - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= u - v = d \end{aligned}$$

Θα δούμε λοιπόν αν υπάρχουν τέτοια u, v.

Πως προκύπτει γεωμετρικά η ανάγκη αναζήτησης των u και v:



Έτσι η αντιστοιχία είναι u=κύβος α ενώ v=κύβος β

Από το σχήμα είναι φανερό ότι ο εξωτερικός κύβος (με ακμή α) προκύπτει από τον εσωτερικό κύβο (με ακμή a-b), τον μικρό κύβο (με ακμή b) στην επάνω δεξιά γωνία και άλλα τρία παραλληλεπίπεδα στις όψεις μπροστά, επάνω και δεξιά που φαίνονται στο σχήμα. Έτσι συγκρίνοντας τους όγκους προκύπτει

$$(a-b)^3 + 3(a-b)ab + b^3 = a^3 \;\Rightarrow$$

$$(a-b)^3 + 3(a-b)ab = a^3 - b^3$$

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΟΜΩΣ ΤΕΤΟΙΑ u ΚΑΙ v ?

$$u - v = d, uv = \left(\frac{c}{3}\right)^3$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με v και αντικαταστήσουμε από τη δεύτερη τότε βρίσκουμε ότι

$$u^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = du$$

Βρίσκουμε τη (θετική) ρίζα u. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη σχέση $u - v = d$ και βρίσκουμε v.
Τέλος αφαιρούμε τις κυβικές ρίζες των u και v και προκύπτει ο τύπος του Cardano. (Γιατί υπάρχει θετική τέτοια ρίζα?)

Λύση τριτοβάθμιας (4)

$$x^3 + cx = d$$

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

Λύση τριτοβάθμιας (5)

Όταν $x^3 + cx = d$

ο Cardano έδωσε τον τύπο για ρίζα της εξίσωσης

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}}$$

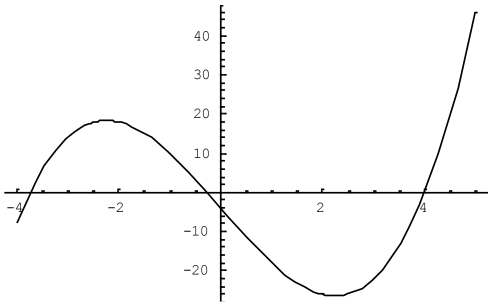
Τι γίνεται όταν $\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 < 0$?

Η κυβική εξίσωση $x^3 = 15x + 4$ ανήκει στη παραπάνω κατηγορία.

Λύση τριτοβάθμιας με Mathematica

$$x^3 = 15x + 4 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Το γράφημα του $y = x^3 - 15x - 4$ με Mathematica είναι



Οι τρεις ρίζες του $x^3 = 15x + 4$ είναι πραγματικές! Η ρίζα που προκύπτει από τον τύπο του Cardano ποια από όλες είναι?

Cardano

- Ο Cardano δεν χρησιμοποίησε σύμβολα, και ο τύπος του δόθηκε ρητορικά (με λόγια).
- Ο προηγούμενος τύπος δίνει μόνο μία ρίζα του κυβικού πολυωνύμου. Τι γίνεται με τις υπόλοιπες?
- Υπάρχουν περιστάσεις στις οποίες βρίσκει αρνητικούς αριθμούς ως ρίζες: τους αποκαλεί «πλασματικούς».
- Παρατήρησε ότι το άθροισμα των ριζών είναι «το αντίθετο» του συντελεστή του x^2.
- Έδωσε γεωμετρική δικαιολόγηση για τη μεθοδολογία και τον τύπο.

Cardano και μιγαδικοί

Στο έργο του Cardano έχουμε την εμφάνιση μιγαδικών για την επίλυση ενός προβλήματος με δευτεροβάθμια εξίσωση:

Πρόβλημα: Να διαιρεθεί το 10 σε δύο μέρη, έτσι ώστε το γινόμενο να είναι 40:

Ο Cardano βρίσκει ότι τα μέρη πρέπει να είναι

$$5+\sqrt{-15}\,,5-\sqrt{-15}$$

και σχολιάζει ότι η αριθμητική δεν οδηγεί πουθενά.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Jerôme Cardan**" by Unknown - this website. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jer%C3%B4me_Cardan.jpg#mediaviewer/File:Jer%C3%B4me_Cardan.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5.3: Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.
- Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
- Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.
- Viete, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.
- Ο καιρός των λογαρίθμων.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ιστορία και οι συλλογισμοί που οδήγησαν στους τύπους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Γίνεται μία σύντομη μνεία στους συμβολισμούς του Viete και στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την επίλυση των τριτοβάθμιων. Δίνεται επίσης μία εισαγωγή στην ιστορία των λογαρίθμων.

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις και Cardano (Ferrari)

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = z - \frac{a}{4} \Rightarrow$$

$$z^4 + ez^2 + fz + g = 0$$

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις (1)

ΙΔΕΑ: Αν και από τις δύο μεριές της ισότητας είχαμε τέλεια τετράγωνα τότε θα παίρναμε τις ρίζες τους και θα είχαμε απλούστερες εξισώσεις για x. Προσπαθούμε λοιπόν να κάνουμε δύο τέλεια τετράγωνα. Ας συμμαζέψουμε πρώτα τα x στο αριστερό σκέλος. Προσθέτουμε $6x^2$ (και στα δύο σκέλη) και το πρώτο γίνεται τέλειο τετράγωνο.

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x \Rightarrow$$

$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x$$

Υπολείπεται βέβαια το δεξιό σκέλος. Θα δοκιμάσουμε να εισάγουμε μία νέα μεταβλητή y μέσα στο τετράγωνο του αριστερού σκέλους έχοντας ως στόχο να δημιουργήσουμε τετράγωνο στο δεξιό σκέλος.

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις (2)

Η ποσότητα που προστέθηκε στο αριστερό σκέλος έτσι ώστε να έχουμε το τετράγωνο με ακμή $x^2 + 6 + y$ είναι $y^2 + 12y + 2yx^2$. Η ίδια ποσότητα πρέπει να προστεθεί και στο δεξιό σκέλος.

$$(x^2 + 6 + y)^2 = 6x^2 + 60x + (y^2 + 12y + 2yx^2)$$

Ποια τιμή πρέπει να έχει το y έτσι ώστε

$$(6 + 2y)x^2 + 60x + (y^2 + 12y) = (ax + c)^2$$

Γενικότερα, πότε $Ax^2 + Bx + C = (ax + c)^2$?

Στη περίπτωση αυτή το πολυώνυμο $Ax^2 + Bx + C$ έχει μία διπλή ρίζα.

Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις (3)

$$Ax^2 + Bx + C = (ax + c)^2 \Leftrightarrow \mathrm{B}^2 - 4AC = 0$$

Αφού $A = 6 + 2y, B = 60, C = y^2 + 12y$ θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$60^2 - 4(2y + 6)(y^2 + 12y) = 0 \Leftrightarrow$$
$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$

Η συνθήκη: «Διακρίνουσα=0» δίνει την εξίσωση της **επιλύουσας τριτοβάθμιας.**

Τύπος του Cardano για το y --- Mathematica

$$y \to -5 + \frac{1}{3}\left(5130 - 81\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{1/3}$$

Για το συγκεκριμένο y θα έχουμε ότι

$(x^2 + \ r)\ 2 = \ (s\ x \ + t)2$ και άρα $x^2 + \ r \ = sx + t$ που μπορούμε να επιλύσουμε.

Σύμφωνα με την Mathematica η λύση είναι:

$$x \to -\frac{1}{2}\sqrt{-4 + \frac{1}{3}\left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\begin{array}{c} -24 - \left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}} - 6\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{\frac{1}{3}} - \\ 360/\left(\sqrt{\left(-4 + \frac{1}{3}\left(41040 - 648\sqrt{3767}\right)^{1/3}\right.} + 2\left(190 + 3\sqrt{3767}\right)^{1/3}\right) \end{array}\right)}$$

Νέο παράδειγμα (1)

$$x^4 + 3 = 12x \Rightarrow$$

$$x^4 + 3 + (2yx + y^2 - 3) = 12x + (2yx + y^2 - 3)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y)^2 = 2yx^2 + 12x + (y^2 - 3)$$

Επιλύουσα τριτοβάθμια

$$\mathbf{2y^3 - 6y - 36 = 0}$$

λύση $\boldsymbol{y = 3}$.

Νέο παράδειγμα (2)

Αντικατάσταση του y:

$$(x^2+3)^2 = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x+1)^2 \Rightarrow$$

Παίρνουμε τετραγωνικές ρίζες και από τα δύο σκέλη

$$x^2 + 3 = \sqrt{6}(x+1) \Rightarrow$$

και επιλύουμε τη δευτεροβάθμια

$$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\sqrt{6} - 1\frac{1}{2}}$$

Υπάρχουν άλλες ρίζες?

Rafael Bombelli (1526-1573) Μηχανικός «Άλγεβρα» 1572



L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Εικόνα 1

Bombelli και τριτοβάθμια

$$x^3 + 6x = 20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Ο Bombelli έδειξε ότι το 2 ισούται με αυτή την ποσότητα!

Ο συλλογισμός του Bombelli (1)

Έστω ότι $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}=\sqrt{b}+a$, ποια είναι τα b, a?

Τότε: $\left(\sqrt{b}+a\right)^3=b\sqrt{b}+3ba+3a^2\sqrt{b}+a^3=$

$$(3a^2+b)\sqrt{b}+(a^3+3ab)=\sqrt{108}+10$$

Επίσης $\left(\sqrt{b}-a\right)^3=b\sqrt{b}-3ba+3a^2\sqrt{b}-a^3=$

$$(3a^2+b)\sqrt{b}-(a^3+3ab)=\sqrt{108}-10$$

Δηλαδή

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=\sqrt{b}-a$$

Ο συλλογισμός του Bombelli (2)

Επίσης, αφού

$$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

προκύπτει αντικαθιστώντας ότι

$$(3a^2 + b)\sqrt{b} + (a^3 + 3ab) = 6\sqrt{3} + 10$$

$$b = 3, 3a^2 + b = 6, a^3 + 3ab = 10$$

και άρα $a = 1$.

Έτσι

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} = \sqrt{b} + a = \sqrt{3} + 1$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{b} - a = \sqrt{3} - 1$$

Ο συλλογισμός του Bombelli (3)

και επομένως

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)=2$$

Στην εξίσωση $x^3 = cx + d$ όπου $c, d > 0$ τότε ο τύπος του Cardano είναι:

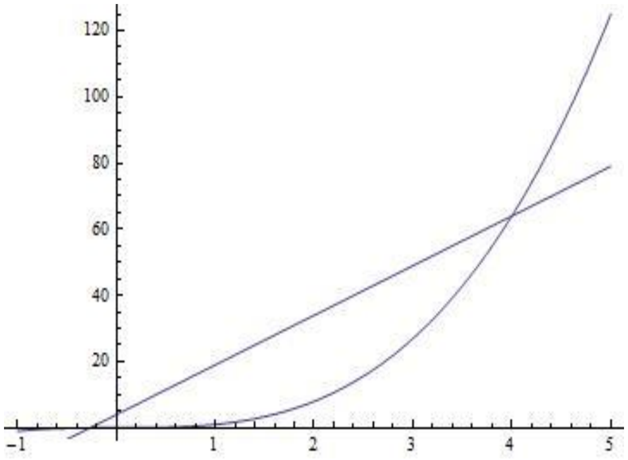
$$\sqrt[3]{\frac{d}{2}+\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\frac{d}{2}-\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^3}}}$$

Σύμφωνα με την απόδειξη του Cardano αυτός είναι ένας θετικός αριθμός.

Ο συλλογισμός του Bombelli (4)

Ο Bombelli έδειξε ότι $x^3 = cx + d$ όπου $c, d > 0$ έχει <u>ακριβώς μία</u> θετική πραγματική λύση. Πράγματι αν κοιτάξουμε το γράφημα της καμπύλης x^3 και της γραμμής $cx + d$ βλέπουμε ότι όταν $x = 0$ τότε η καμπύλη έχει την τιμή 0 ενώ η γραμμή την τιμή d αλλά μετά η καμπύλη αυξάνεται με πολύ γρηγορότερο ρυθμό. Άρα για θετικά x η καμπύλη και η γραμμή τέμνονται ακριβώς μία φορά.

Συντεταγμένες και Oresme (14ο αιώνα)



Ρίζες αρνητικών αριθμών: μέθοδος σοφιστείας (1)

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Ο Bombelli έκανε πράξεις ακολουθώντας τους κανόνες για τα ριζικά και έδειξε ότι η τιμή (από τον τύπο) του Cardano είναι ίση με το 4.

Αν

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

Τότε

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

Ρίζες αρνητικών αριθμών: μέθοδος σοφιστείας (2)

Επίσης προκύπτει ότι

$$a^2 + b = 5$$
$$a^3 - 3ab = 2$$

Όμως αφού $a^2 < 5, a^3 > 2$

Στους ακεραίους η μόνη λύση είναι το $a = 2$ και $b = 1$.

Έπεται ότι

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right) = 4$$

Τεράστια Σημασία των λύσεων τρίτου-τετάρτου βαθμού εξισώσεων (1)

Οι λύσεις δεν ήταν αποτέλεσμα πρακτικών υπολογισμών

Οι λύσεις δεν χρησίμευαν στους μηχανικούς.

Προσεγγιστικές λύσεις για αυτές τις εξισώσεις υπήρχαν.

Έδωσαν ώθηση στην αλγεβρική έρευνα προς διάφορες κατευθύνσεις.

Στην Άλγεβρα: προσπάθεια για γενίκευση για εξισώσεις οποιουδήποτε βαθμού.

Ενασχόληση με άλλο είδος αριθμών: τις τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών.

Τεράστια Σημασία των λύσεων τρίτου-τετάρτου βαθμού εξισώσεων (2)

Στην εξίσωση $x^3 + cx = d$ όπου $c, d > 0$ ο τύπος του Cardano είναι:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(d/2)^2 + (c/3)^3} + d/2} - \sqrt[3]{\sqrt{(d/2)^2 + (c/3)^3} - d/2}$$

Στην εξίσωση $x^3 = cx + d$ όπου $c, d > 0$ ο τύπος του Cardano είναι:

$$x = \sqrt[3]{d/2 + \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}} + \sqrt[3]{d/2 - \sqrt{(d/2)^2 - (c/3)^3}}$$

Μπορούμε να τους ενοποιήσουμε για τη περίπτωση

$$x^3 + cx + d = 0$$

(χωρίς περιορισμούς στα πρόσημα των c, d);

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Algebra by Rafael Bombelli**" by neznan - Book printed by editor Giovanni Rossi. Licensed under Public domain via Wikimedijina Zbirka

  http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Algebra_by_Rafael_Bombelli.gif#mediaviewer/File:Algebra_by_Rafael_Bombelli.gif

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5.4: Viete, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.
- Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
- Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.
- Viete, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.
- Ο καιρός των λογαρίθμων.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ιστορία και οι συλλογισμοί που οδήγησαν στους τύπους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Γίνεται μία σύντομη μνεία στους συμβολισμούς του Viete και στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την επίλυση των τριτοβάθμιων. Δίνεται επίσης μία εισαγωγή στην ιστορία των λογαρίθμων.

François Viète



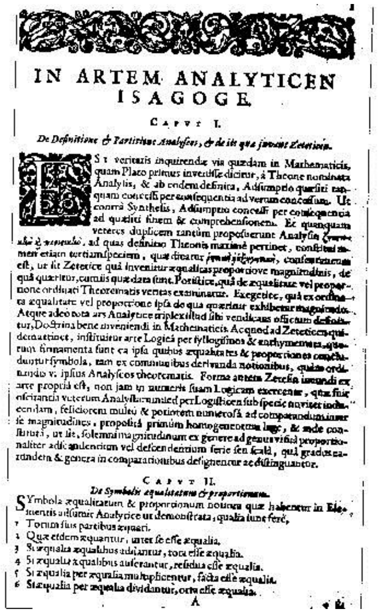
Εικόνα 1

Επάγγελμα: δικηγόρος
(1540-1603) Γάλλος
Σύμβουλος του Ερρίκου III
και του Ερρίκου IV.

Η πιο παραγωγική μαθηματικά περίοδος της ζωής του ήταν όταν έπεσε σε δυσμένεια !(1584-1589).

In artem analyticam isagoge (1591)

In artem analyticam isagoge (1591)



IN ARTEM ANALYTICEN ISAGOGE.

CAPUT I.

De Definitione & Partitione Analyseos, & de iis quæ juvant Zeteticen.

Est veritatis inquirendæ via quædam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, à Theone nominata Analysis, & ab eodem definita, Adsumptio quæsiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Ut contrà Synthesis, Adsumptio concessi per consequentia ad quæsiti finem & comprehensionem. Et quanquam veteres duplicem tantùm proposuerunt Analysin [illegible], ad quas definitio Theonis maximè pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quæ dicatur [illegible], consentaneum est, ut sit Zetetice quâ invenitur æqualitas proportiove magnitudinis, de quâ quæritur, cum iis quæ data sunt. Poristice, quâ de æqualitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, quâ ex ordinata æqualitate vel proportione ipsa de qua quæritur exhibetur magnitudo. Atque adeò tota ars Analytice triplex illud sibi vendicans officium definiatur, Doctrina bene inveniendi in Mathematicis. Ac quod ad Zeteticen quidem attinet, instituitur arte Logicâ per syllogismos & enthymemata, quorum firmamenta sunt ea ipsa quibus æqualitates & proportiones concluduntur symbola, tam ex communibus derivanda notionibus, quàm ordinandis vi ipsius Analyseos theorematis. Forma autem Zetesin ineundi ex arte propria est, non jam in numeris suam Logicam exercente, quæ fuit oscitantia veterum Analystarum: sed per Logisticen sub specie noviter inducendam, feliciorem multò & potiorem numerosâ ad comparandum inter se magnitudines, propositâ primùm homogeneorum lege, & inde constitutâ, ut fit, solemni magnitudinum ex genere ad genus vi suâ proportionaliter adscendentium vel descendentium serie seu scalâ, quâ gradus earundem & genera in comparationibus designentur ac distinguantur.

CAPUT II.

De Symbolis æqualitatum & proportionum.

Symbola æqualitatum & proportionum notiora quæ habentur in Elementis adsumit Analytice ut demonstrata, qualia sunt ferè,

1 Totum suis partibus æquari.
2 Quæ eidem æquantur, inter se esse æqualia.
3 Si æqualia æqualibus adjiciantur, tota esse æqualia.
4 Si æqualia æqualibus auferantur, residua esse æqualia.
5 Si æqualia per æqualia multiplicentur, facta esse æqualia.
6 Si æqualia per æqualia dividantur, orta esse æqualia.

A

Εικόνα 2

υπό την επιμέλεια του F. Van Schooten (1646)



Εικόνα 3

Παράμετρος και άγνωστη ποσότητα

A cubus + B quad. in *A* æquetur *B* quad. in *Z*.

↓

$$A^3 + B^2A = B^2 + Z.$$

Ο Viete εισαγάγει και χρησιμοποιεί φωνήεντα για το άγνωστο μέγεθος και σύμφωνα για το γνωστό. Έτσι κάνει τον διαχωρισμό ανάμεσα στην έννοια της παραμέτρου και της άγνωστης ποσότητας.

«Εισαγωγή στην Αναλυτική Τέχνη»

Θέτει την άλγεβρα ως την επιστήμη για την ανακάλυψη στα μαθηματικά. Πιστεύει ότι ο «φορμαλισμός» της άλγεβρας θα μπορεί να λύσει όλα τα μαθηματικά προβλήματα.

Η χρήση παραμέτρων και μεταβλητών μετέτρεψε την άλγεβρα από μελέτη συγκεκριμένων προβλημάτων στη μελέτη γενικών προβλημάτων.

Με τον ίδιο τρόπο η «αναλυτική του τέχνη» επηρέασε και τους άλλους τομείς, στην ανακάλυψη και στην απόδειξη των αποτελεσμάτων.

Van Roomen και Viete

- 1593 van Roomen (Βέλγος) δημοσίευσε την εξίσωση.

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 379x^{3} + 45x = A$$

$$A = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

- Ο Viete έδωσε μία λύση αμέσως μόλις του τέθηκε το πρόβλημα από τον βασιλιά και έδωσε 22 λύσεις μία μέρα αργότερα!

Λύση τριτοβάθμιων εξισώσεων χρησιμοποιώντας ιδιότητες του συνθ (1)

Θα χρησιμοποιήσει τον τύπο για το cos 3θ

$$4cos^3\theta - 3cos\theta = \cos 3\theta$$

Η αντικατάσταση του x με ky όπου k η ποσότητα που περιγράφεται παρακάτω θα οδηγήσει σε μία μορφή που μοιάζει με αυτήν της ταυτότητας:

$$\left.\begin{array}{c} x^3 + ax + b = 0 \\ k = \sqrt{-\frac{4a}{3}}, x = ky \end{array}\right\} \Rightarrow 4y^3 - 3y = c$$

Έτσι θέλει να βρει θ που να ικανοποιεί

$$\cos 3\theta = c.$$

Λύση τριτοβάθμιων εξισώσεων χρησιμοποιώντας ιδιότητες του συνθ (2)

$z^3 - 3z + 1 = 0$

$z = 2y$

$4y^3 - 3y = -\frac{1}{2}$

$$y = \cos\theta \to \cos 3\theta = -\frac{1}{2}$$

$$3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \to \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$$

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k\right)$$

$$z = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k\right)$$

$$z_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$$

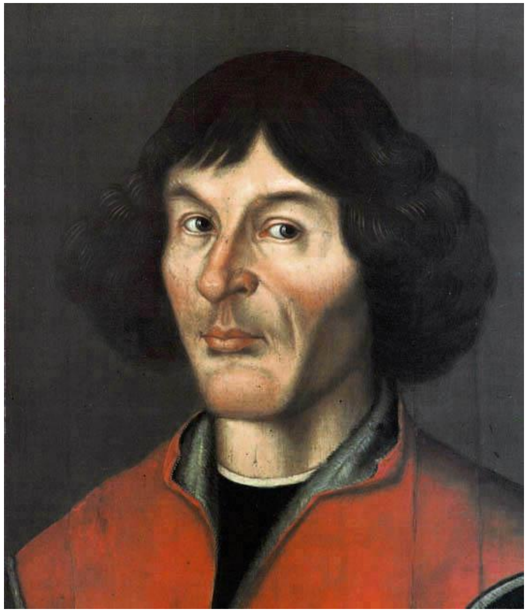
$$z_2 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$z_3 = 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)$$

Εξέλιξη

1. Diophantus of Alexandria (3rd century CE) $x^3 = 2 - x$
2. Luca Pacioli (ca. 1445-ca.1559) $x^3 + x = 12$
3. Nicolas Chuquet (et. 1500) $\sqrt{3x^4 - 24} = 8$
4. Michael Stifel (1486-1567) $116 + \sqrt{41472} - 18x - \sqrt{648}x = 0$
5. Girolamo Cardano (1501-1576) $x^3 = 15x + 4$
6. Rafael Bombelli (ca. 1526-1573) $x^6 - 10x^3 + 16 = 0$
7. Francois Viete (1540-1603) $x^3 - 8x^3 + 16x = 40$
8. Thomas Harriot (1560-1621) $a^3 - 3ab^2 = 2c^3$
9. Albert Girard (1595-1632) $x^3 = 13x + 12$
10. Rene Descartes (1596-1650) $px + q = 0$

Nicolaus Copernicus
Πολωνία (1473-1543)



Εικόνα 4

Βιβλία που τον σημάδεψαν (1492):

«Στοιχεία»

Alfonsine Tables (θεωρία πλανητών)

Tabulae directionum του Regiomontanus
(στην Σφαιρική αστρονομία)

Η γη γυρίζει γύρω από τον ήλιο... (1514)

Stevin
(1548-1620)



Εικόνα 5

Δεκαδικοί αριθμοί στη Δύση (1585)

Johannes Kepler



Εικόνα 6

Γερμανία
1571-1630

Γη και πλανήτες σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο.
Τρεις Θεμελιώδεις νόμοι (1609 και 1619)

Νόμοι

- **1ος Νόμος: Η τροχιά των πλανητών είναι *ελλειπτική* με τον Ήλιο να βρίσκεται στη μία εστία της έλλειψης.**
- **2ος Νόμος: Η ακτίνα που ενώνει τον Ήλιο και τον κάθε πλανήτη διαγράφει σε *ίσους χρόνους ίσα εμβαδά.***
- **3ος Νόμος: Το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς του κάθε πλανήτη είναι *ανάλογο* με τον κύβο του μήκους του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης που διαγράφει.**

(πως μπορεί να κάνει κανείς μετρήσεις και υπολογισμούς με τόσο μεγάλους αριθμούς?)

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**Francois Viete**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Francois_Viete.jpg#mediaviewer/File:Francois_Viete.jpg
- **Εικόνα 2:** http://everyhistory.org/1591-2.html
- **Εικόνα 3:** «**François Viète - Opera Mathematica**» par François Viète — Bibliothèque nationale de France. Sous licence Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te_Opera_Mathematica.jpg#mediaviewer/File:Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te_-_Opera_Mathematica.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 4:** http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nikolaus_Kopernikus.jpg#mediaviewer/File:Nikolaus_Kopernikus.jpg
- **Εικόνα 5:** "**Simon-stevin**" by Unknown - Digitool Leiden University Library, http://socrates.leidenuniv.nl. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons – http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simon-stevin.jpeg#mediaviewer/File:Simon-stevin.jpeg
- **Εικόνα 6:** "**Johannes Kepler 1610**" by Unknown - Kopie eines verlorengegangenen Originals von 1610 im Benediktinerkloster in Kremsmünster. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johannes_Kepler_1610.jpg#mediaviewer/File:Johannes_Kepler_1610.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 5.5: Ο καιρός των λογαρίθμων

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιταλοί και τριτοβάθμια εξίσωση.
- Η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης.
- Επίλυση της τεταρτοβάθμιας.
- Viete, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι νόμοι του σύμπαντος.
- Ο καιρός των λογαρίθμων.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ιστορία και οι συλλογισμοί που οδήγησαν στους τύπους για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Γίνεται μία σύντομη μνεία στους συμβολισμούς του Viete και στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων για την επίλυση των τριτοβάθμιων. Δίνεται επίσης μία εισαγωγή στην ιστορία των λογαρίθμων.

Λογάριθμοι (λόγος+ αριθμοί)

Οι πρόδρομοι:

- Αρχιμήδης και αρίθμηση με εκθέτες (Ψαμμίτη).
- Πίνακες με δυνάμεις του 2.

Κινητήρια δύναμη: υπολογισμοί στην Αστρονομία και Ναυσιπλοΐα.

Stifel

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512

16 * 32

αντίστοιχοι εκθέτες

4, 5

άθροισμα εκθετών 9, αντίστοιχη δύναμη 512.

Ο Stifel (1544) συνέκρινε τις δύο σειρές (στήλες): το άθροισμα όρων στην αριθμητική σειρά αντιστοιχεί σε γινόμενο όρων της γεωμετρικής σειράς.

Ένας τέτοιος πίνακας με δυνάμεις του 2 δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για πολλαπλασιασμούς αφού οι δυνάμεις του 2 έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.

Αστρονομία

Αστρονομία: το 1593 Δανοί μαθηματικοί πρότειναν να χρησιμοποιούνται τριγωνομετρικοί τύποι για να γίνονται οι υπολογισμοί ευκολότερα. Πράγματι οι πολλαπλασιασμοί ανάγονται σε αθροίσεις και αφαιρέσεις (με χρήση εκτεταμένων πινάκων για ημίτονα και συνημίτονα.)

π.χ. Ο τύπος $\sin\alpha\cos\beta = ½\sin(\alpha+\beta) + 1/2\sin(\alpha-\beta)$

θα χρησιμοποιηθεί για το γινόμενο

0.17365 * 0.99027

Από τους πίνακες:

$$0.17365 = \sin(10), 0.99027 = \cos(8)$$

$$\sin(18) = 0.3092,\ \sin(2) = 0.03490$$

άρα

0.17365 * 0.99027 = ½ (0.3092 + 0.03490)=0.17196

(το παράδειγμα είναι με χρήση τωρινών ορισμών για sin, cos αφού τότε sin ήταν το μισό της αντίστοιχης χορδής κύκλου με ακτίνα 10,000,000)

Θέμα παρουσίασης

Θέμα παρουσίασης: Ιστορία της τριγωνομετρίας και της αστρονομίας.

Πίνακας με δυνάμεις του 2

0	1	16*32 Αντίστοιχοι εκθέτες 4,5 Άθροισμα εκθετών 9 Αντίστοιχη δύναμη 512
1	2	
2	4	
3	8	
4	16	
5	32	
6	64	
7	128	
8	256	
9	512	

Ένας τέτοιος πίνακας με δυνάμεις του 2 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για πολλαπλασιασμούς αφού οι δυνάμεις του 2 έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.

John Napier (1550–1617) Σκωτία



Εικόνα 1

Ξεκίνησε τη μελέτη το 1594.

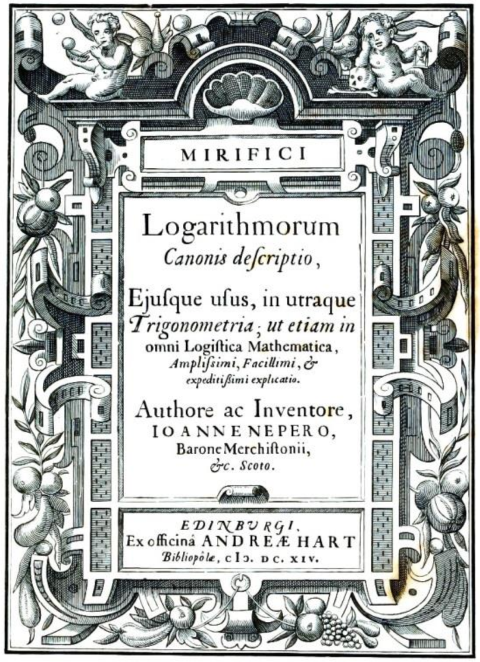
Δημοσίευσε το 1614 το

Mirafici logarithmorum canonis descriptio

και το 1619

Mirafici logarithmorum canonis constructio

Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614).



Εικόνα 2

57 σελίδες εξήγηση

Και

90 σελίδες με πίνακες.

Ο λογάριθμος Napier

Αν

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

τότε L είναι ο λογάριθμος Napier του N.

Για ευκολία τον γράφουμε Nap log N.

Έτσι

$$Nap \log 10{,}000{,}000 = 0$$

ενώ

$$Nap \log 9{,}999{,}999 = 1.$$

Το πρώτο βιβλίο του Napier

Αν *a* : *b*=*c* : *d* τότε

Nap log *a* – Nap log *b* = Nap log *c* – Nap log *d*.

Το πρώτο βιβλίο του Napier εκδόθηκε μετά από 20 χρόνια υπολογισμών: έδωσε τον πίνακα των λογαρίθμων για τους αριθμούς από το 5-10 εκατομμύρια.

Σε αντίθεση με τη γεωμετρική σειρά

$$1,2,4,8,\ldots$$

Ο Napier ήθελε τα κενά ανάμεσα στους διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής σειράς

$$c, cr, cr^2, cr^3, \ldots$$

να είναι μικρά.

Ο πρώτος πίνακας του Napier (1)

Έτσι ξεκίνησε με το λόγο

$$0{,}9999999 = 1 - 10^{-7}$$

Ο πρώτος πίνακας του Napier αποτελείται από τους πρώτους 101 όρους της γεωμετρικής σειράς με πρώτο όρο

$$c = 10{,}000{,}000 = 10^{7}$$

Δηλαδή υπολόγισε τους αριθμούς

$$10^{7}(1 - 10^{-7})^{n}, n = 0{,}1, \ldots , 100$$

Ονόμασε τους αριθμούς 0,1,…,100 **logarithms**.

Ο πρώτος πίνακας του Napier (2)

Υπολόγισε τον i-στο όρο του πρώτου πίνακα a_i με αφαίρεση:

$$a_i = a_{i-1} - a_{i-1}/10^7.$$

Έτσι βρήκε

10000000 9999999 9999998.000001

… 99999900.0004950

Αν

$$x = 10^7(1-10^{-7})^n, y = 10^7(1-10^{-7})^m$$

Τότε

$$\frac{x}{y} = (1-10^{-7})^{n-m}$$

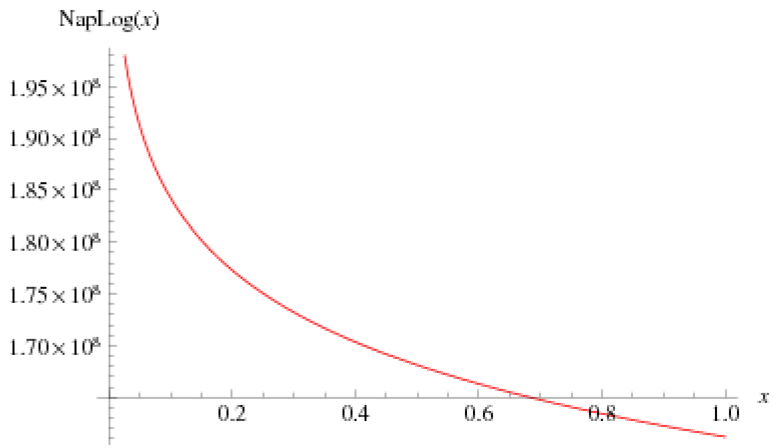
Ο δεύτερος πίνακας του Napier

Στο δεύτερο πίνακα ο Napier υπολόγισε πάλι με τον ίδιο τρόπο (αφαίρεση) τους πρώτους 51 όρους της γεωμετρικής σειράς με λόγο $1 - 10^{-5}$ και πρώτο όρο 10^7.
Για τον τρίτο πίνακα χρησιμοποίησε γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιώντας τις τιμές των δύο παραπάνω πινάκων. Ο τρίτος πίνακας αποτελείται από 21 σειρές και 69 στήλες όπου το στοιχείο στη θέση i, j είναι

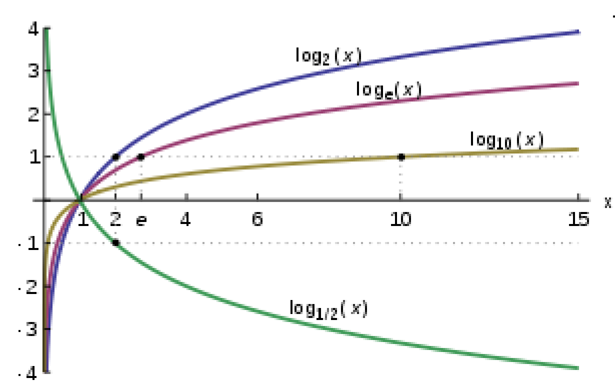
$$10^7 \left(1 - \frac{1}{2000}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{j-1}$$

Η κάθε σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $1 - \frac{1}{100}$ όπως και κάθε στήλη με λόγο $1 - \frac{1}{200}$.

Briggs

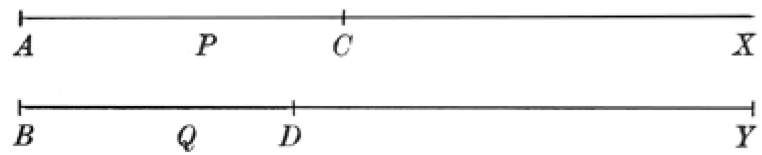


Σήμερα
↓



Ο Briggs (1561-1630, Άγγλος) μετά από συνεννόηση με τον Napier κατασκεύασε πίνακες με βάση 10 έτσι ώστε log 1=0.

Ο επίσημος ορισμός του Napier (1)



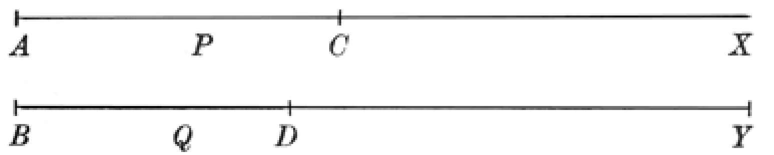
Έστω ευθύγραμμο τμήμα BY (μήκος $r = 10{,}000{,}000 = 107$)

Έστω ημιευθεία AX. Τα P και Q ξεκινούν ταυτόχρονα από το A και B. Η ταχύτητα του P παραμένει σταθερή, και ίση με 10^7.

Η ταχύτητα του Q όμως ελαττώνεται ανάλογα με την απόσταση του Q από την άλλη άκρη Y. Έστω ότι σε κάποιο χρόνο το P φτάνει στο C ενώ το Q φτάνει στο D. Τότε ο λογάριθμος του DY είναι το AC. Με άλλα λόγια

AC= Naplog DY

Ο επίσημος ορισμός του Napier (2)



Έστω ότι πέρασε χρόνος t για να φτάσει P στο C.
Έτσι $y = AC = 107t$.

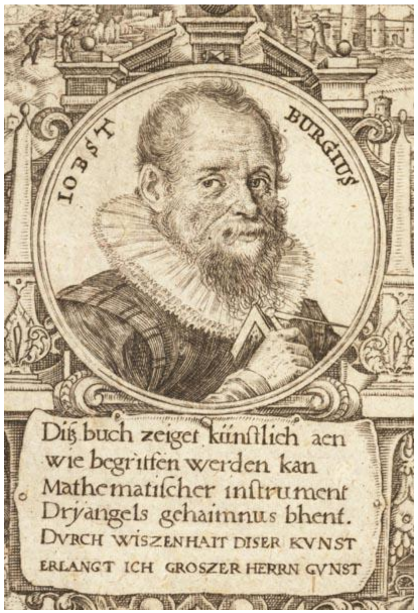
Αντίστοιχα έστω $x = DY$. (Σύγχρονα) θα γράφαμε ότι η ταχύτητα του Q, δηλ. dx/dt ικανοποιεί την ισότητα $dx/dt = -x$ ενώ η αρχική της τιμή είναι 10^7

$Nap \log x = y$:

Όταν t είναι πολύ μικρό, 10^{-7} τότε $y = 1$ ενώ $x =$ 9,999,999.

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

Jobst Burgi (1552-1632) Ελβετός



Εικόνα 3

Η δουλειά του όμως δημοσιεύτηκε το 1620.

Έδωσε πίνακες με 23,027 στοιχεία, με λόγο $1+10^{-4}$.

St. Vincent

- Εκτός από τους αριθμητικούς υπολογισμούς, οι λογάριθμοι επηρέασαν την εξέλιξη των μαθηματικών όταν το 1647 ο Βέλγος μοναχός St. Vincent (1854-1667) βρήκε ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στους λογαρίθμους και το εμβαδόν κάτω από τη καμπλύλη $xy = 1$.



Εικόνα 4

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1: John Napier**" by Unknown - This scan from [1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:John_Napier.jpg#mediaviewer/File:John_Napier.jpg
- **Εικόνα 2:** "**Logarithms book Napier**" by Unknown - Napier, Mark (1834) , William Blackwood. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logarithms_book_Napier.jpg#mediaviewer/File:Logarithms_book_Napier.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 3:** "**Jost Bürgi Porträt**" by User Dvoigt on de.wikipedia - This file is lacking source information.Please edit this file's description and provide a source.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg#mediaviewer/File:Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg
- **Εικόνα 4:** "**Grégoire de Saint-Vincent** (1584-1667)" by Grentidez - Alfred Hamy: Galerie illustrée de la Compagnie de Jésus, 1893.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gr%C3%A9goire_de_Saint-Vincent_(1584-1667).jpg#/media/File:Gr%C3%A9goire_de_Saint-Vincent_(1584-1667).jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 5: Μαθηματικά στην Αναγέννηση. Ενότητα 5.5: Ο καιρός των λογαρίθμων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.1: Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.

Σκοποί Ενότητας

- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

René Descartes (Γαλλία) 1596-1650 φιλόσοφος

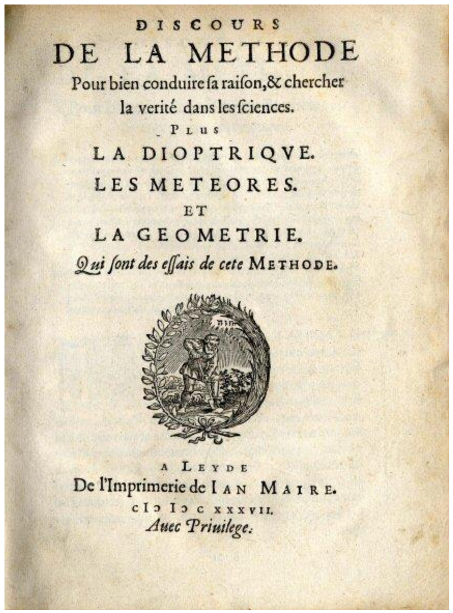


Εικόνα 1

“Cogito ergo sum”

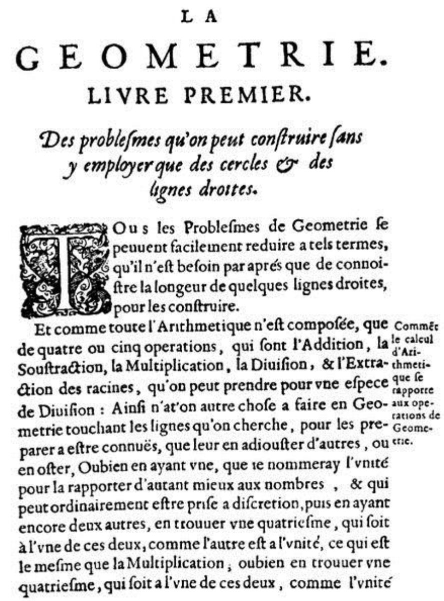
“Σκέφτομαι άρα υπάρχω”

De la Methode



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c xxxvii.
Auec Priuilege.



LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.
Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Εικόνα 2

1637

Εικόνα 3

Καρτεσιανή γεωμετρία

Καρτεσιανή γεωμετρία=αναλυτική γεωμετρία

Στόχος του:

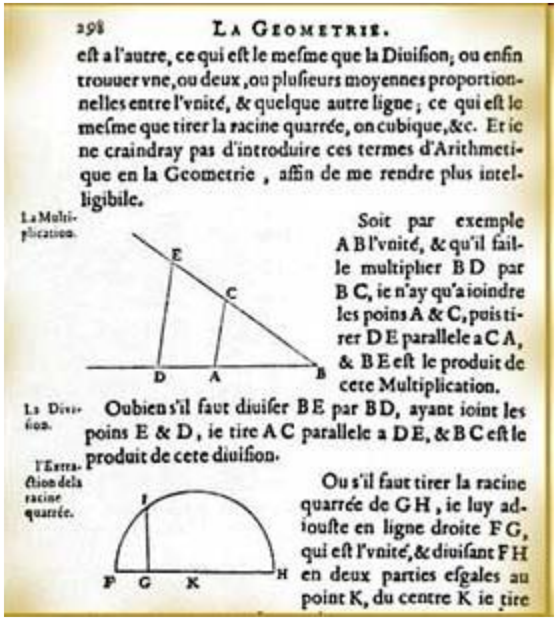
«κάθε πρόβλημα της γεωμετρίας μπορεί εύκολα να μετατραπεί έτσι ώστε η γνώση των μηκών ορισμένων ευθύγραμμων τμημάτων να αρκεί για την κατασκευή του.»

Συστηματική χρήση της συμβολικής άλγεβρας: σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός είναι βασισμένος στον συμβολισμό του Descartes.

(μετατροπή ενός γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρικό)

Παραμέτροι και άγνωστοι ευθύγραμμα τμήματα

Descartes θεωρούσε τις παραμέτρους και τους αγνώστους ευθύγραμμα τμήματα.



298 LA GEOMETRIE.

est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

l'Extraction de la racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire

Εικόνα 4

Για παράδειγμα: x τετράγωνο και x κύβος ερμηνεύονται και αυτά ως ευθύγραμμα τμήματα.

AB=1, τότε

BD BC= BE

Μπορεί κανείς να ερμηνεύσει με τον ίδιο τρόπο και ριζικά?

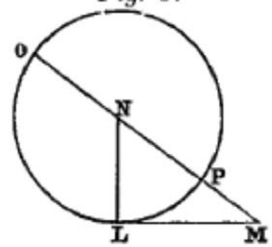
Geometrie

exemple

$$z^2 = az + b^2,$$

je fais le triangle rectangle $N\,L\,M$ (*fig. 3*), dont le côté $L\,M$ est égal à b, racine carrée de la quantité connue b^2, et l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre

Fig. 3.

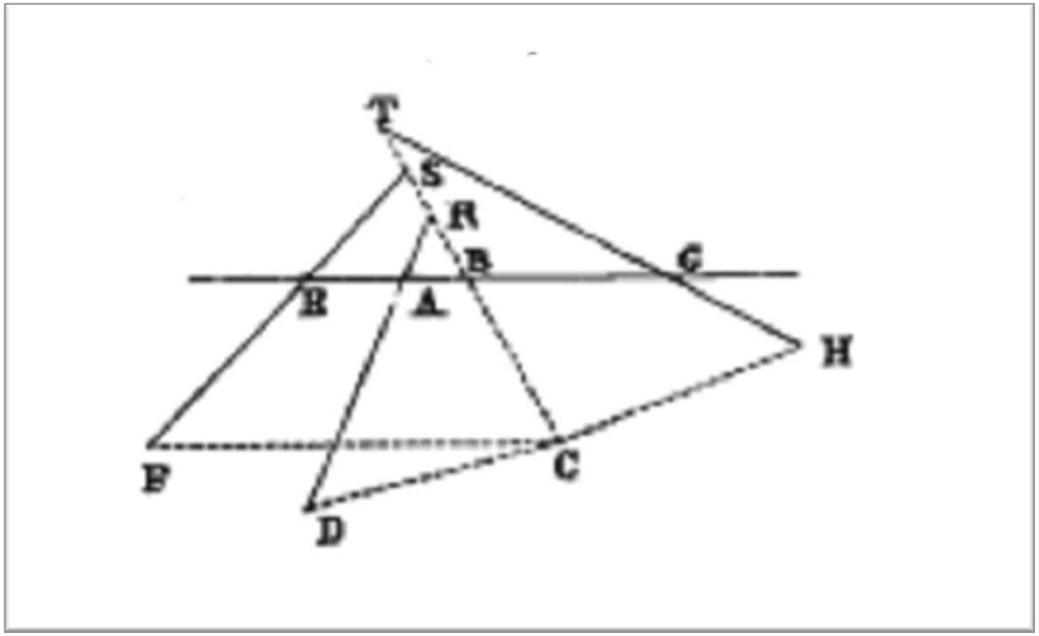


quantité connue qui étoit multipliée par z, que je suppose être la ligne inconnue ; puis prolongeant $M\,N$, la base de ce triangle, jusques à O, en sorte que $N\,O$ soit égale à $N\,L$, la toute $O\,M$ est z, la ligne cherchée ; et elle s'exprime en cette sorte :

Λύση: $LM = b, LN = a/2$ (Geometrie)

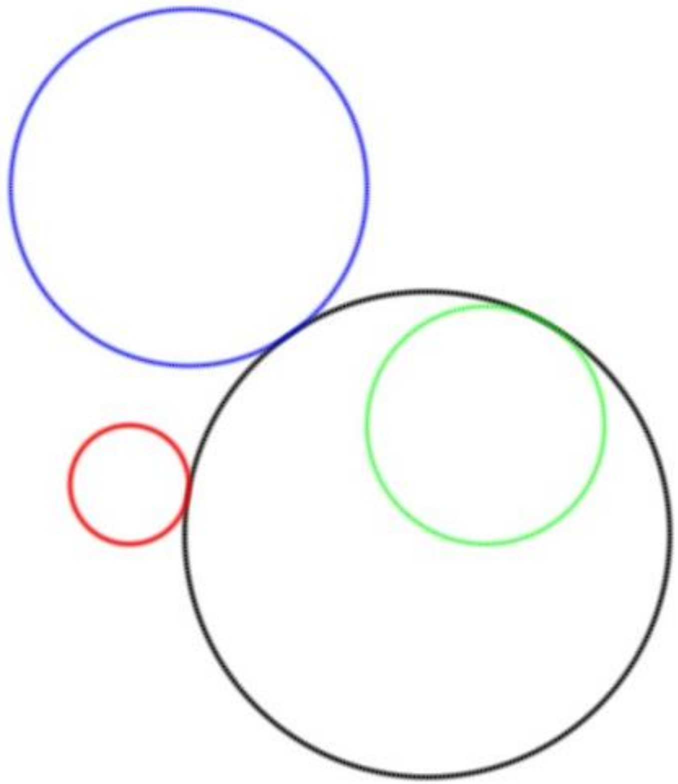
$$z = OM$$

Χρήση συντεταγμένων:



Παράδειγμα: Για τη λύση του προβλήματος του Απολλώνιου: όλες οι γραμμές δίνονται αναφορικά με δύο: EG(x), CT(y)

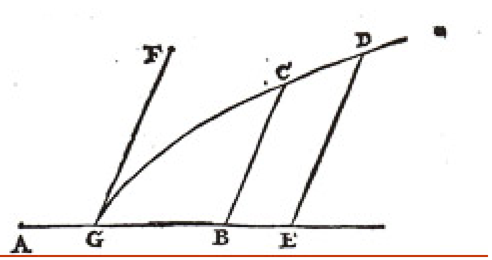
Απολλώνιο πρόβλημα:



Κατασκευή κύκλων

(με κανόνα και διαβήτη), που είναι εφαπτόμενοι σε τρεις δεδομένους κύκλους στο επίπεδο.
Το πρόβλημα έθεσε ο Απολλώνιος ο Περγαίος (περ. 262 π.Χ. - περ. 190 π.Χ.) στο έργο του «Επαφαί».

Descartes



Theorem IX.

«Ελπίζω ότι το μέλλον θα με κρίνει με ευγενικά

όχι μόνο για τα πράγματα που εξήγησα, αλλά και για αυτά που παρέλειψα για να αφήσω σε άλλους τη χαρά της ανακάλυψης.»

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Frans Hals - Portret van René Descartes**" by After Frans Hals (1582/1583–1666) - André Hatala [e.a.] (1997) De eeuw van Rembrandt, Bruxelles: Crédit communal de Belgique, ISBN 2-908388-32-4.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg#mediaviewer/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Descartes Discours de la Methode**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg#mediaviewer/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 3**: “La dioptrique”, “Les meteores”, “La geometrie” "GeometryDescartes" by Original uploader was User:Caton at [1] - Originally from fr.wikipedia; description page is/was here.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeometryDescartes.JPG#mediaviewer/File:GeometryDescartes.JPG
- **Εικόνα 4: σελίδα από** “La geometrie” "GeometryDescartes" by Original uploader was User:Caton at [1] - Originally from fr.wikipedia; description page is/was here.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeometryDescartes.JPG#mediaviewer/File:GeometryDescartes.JPG

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.2: Μέθοδοι παραγώγισης.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.

Σκοποί Ενότητας

- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

Marin Mersenne (Γαλλία) 1588-1648



Εικόνα 1

«Ινστιτούτο (ανταλλαγής γνώσεων) μαθηματικών»

Πρώτοι αριθμοί του Mersenne

$$2^P - 1$$

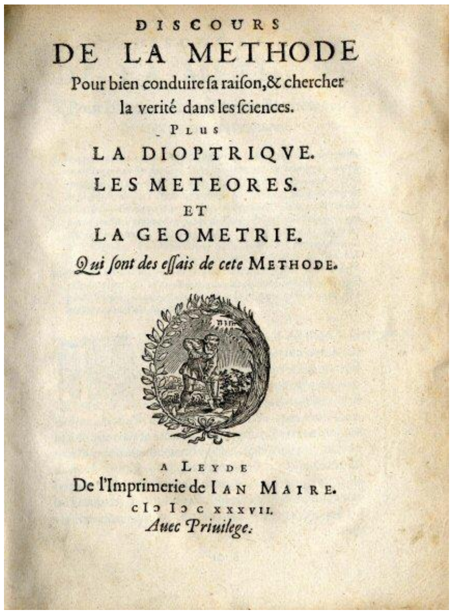
René Descartes (Γαλλία) 1596-1650 φιλόσοφος



Εικόνα 2

“Cogito ergo sum”

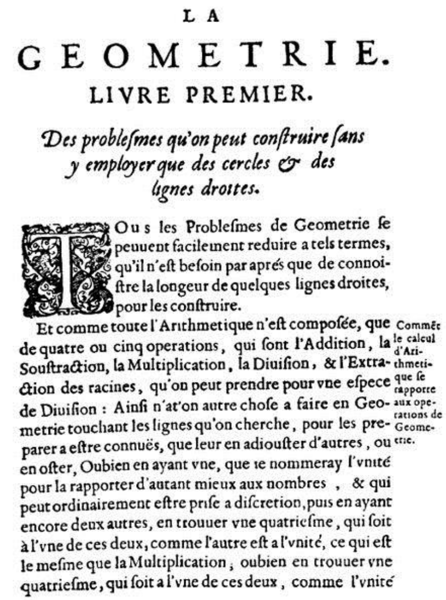
De la Methode


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↄ Iↄ c xxxvii.
Auec Priuilege.

Εικόνα 3

1637


LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commét le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Εικόνα 4

Καρτεσιανή γεωμετρία = αναλυτική γεωμετρία

Καρτεσιανή γεωμετρία = αναλυτική γεωμετρία
Στόχος του:

«κάθε πρόβλημα της γεωμετρίας μπορεί εύκολα να μετατραπεί έτσι ώστε η γνώση των μηκών ορισμένων ευθύγραμμων τμημάτων να αρκεί για την κατασκευή του.»

Συστηματική χρήση της συμβολικής άλγεβρας: σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός είναι βασισμένος στον συμβολισμό του Descartes.

(μετατροπή ενός γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρικό)

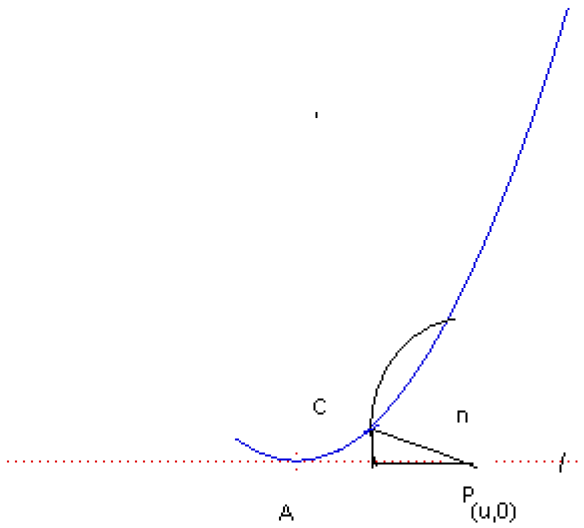
Descartes και Λογισμός (1)

Το πρόβλημα της εφαπτομένης
(Descartes για την μέθοδό του)



leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie.

Descartes και Λογισμός (2)



Θα βρούμε το κέντρο P του εφαπτόμενου κύκλου της καμπύλης ACE

$$y = x^2$$

Στο σημείο C: (x_0, x_0^2).

Η εξίσωση του κύκλου είναι

$$n^2 = y^2 + (v - x)^2$$

Τα σημεία τομής του κύκλου και της παραβολής προκύπτουν από τηνα αντικατάσταση του , δηλαδή από την εξίσωση

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = 0$$

Descartes και Λογισμός (3)

Η εξίσωση αυτή θα έχει διπλή ρίζα στο x_0 αν

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = (x - x_0)^2 q(x)$$

Άρα

$$x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - n^2 = (x - x_0)^2 (x^2 + ax + b)$$

Και επομένως

$$a - 2x_0 = 0$$

$$b - 2x_0 a + x_0^2 = 1$$

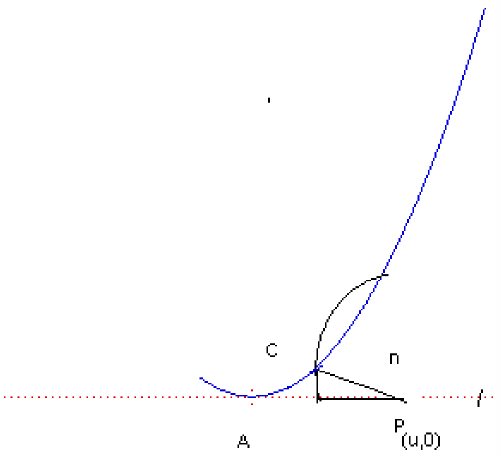
Descartes και Λογισμός (4)

$$ax_0^2 - 2bx_0 = -2v$$
$$bx_0^2 = v^2 - n^2$$

Άρα $$v = 2x_0^3 + x_0.$$

και η κλίση της ακτίνας του κύκλου είναι

$$\frac{-y_0}{v - x_0} = \frac{-x_0^2}{2x_0^3} = \frac{-1}{2x_0}$$



ενώ η κλίση της εφαπτομένης είναι $2x_0$.

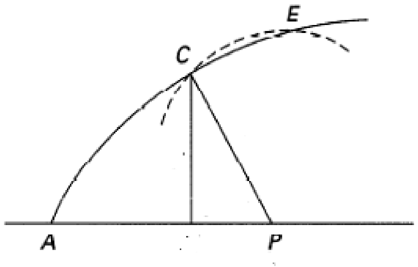
Πράγματι η παράγωγος του $y = x^2$ στο x_0 είναι $2x_0$.

Descartes και Λογισμός (5)

Στη μέθοδό του ο Descartes βρισκει την κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη της καμπύλης

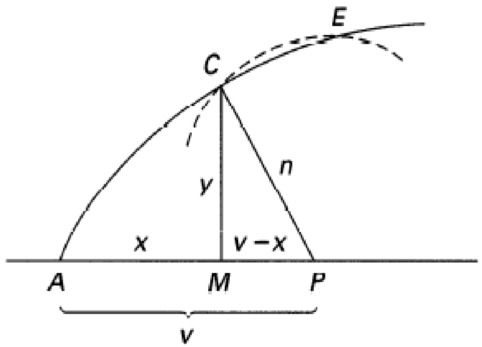
Βρίσκει τον κύκλο (δηλ. το κέντρο του κύκλου) που εφάπτεται της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο.

Η ακτίνα του κύκλου είναι η ζητούμενη κάθετος.



Ο κύκλος έχει την ιδιότητα να τέμνει τη καμπύλη ακριβώς σε ένα σημείο. Τοποθετεί τον κύκλο σε άξονα συντεταγμένων.

Descartes και Λογισμός (6)



Ο άξονας των x είναι η ευθεία AP. x είναι το ευθύγραμμο τμήμα AM. Αν $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της καμπύλης τότε το σημείο C πάνω στη καμπύλη ACE απέχει y από την ευθεία AP.

Ο κύκλος με κέντρο P: το ευθύγραμμο τμήμα AP έχει μήκος v και το P απέχει απόσταση 0 από τον άξονα των x, δηλαδή P: $(v, 0)$. Η ακτίνα $n = PC$ δίνεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Το n καθορίζεται από το v, αφού η μία πλευρά του τριγώνου είναι $v - x$, και η άλλη πλευρά είναι $y = f(x)$. Ψάχνουμε να βρούμε το v.

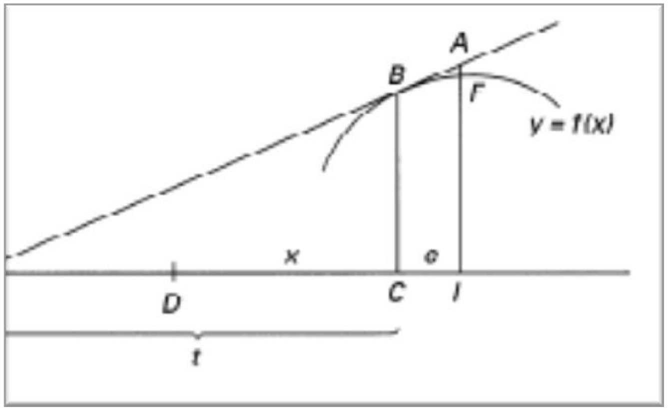
Pierre de Fermat (Γαλλία) 1601-1665 δικηγόρος



Εικόνα 5

Ουσιαστική συμβολή στην ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας με τη μελέτη:
Ad locos planos et solidos isagoge
(1636, χειρόγραφο)
Ημερομηνία δημοσίευσης: 1679

Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης (1)





ΙΔΕΑ: Έστω Β το σημείο της καμπύλης $y = f(x)$, και Α πάνω στην εφαπτομένη. Αν το Α είναι πολύ κοντά στο Β και F είναι το σημείο τομής της καμπύλης και του ευθ. τμήματος ΑΙ (που είναι κάθετο στον άξονα των x) τότε ΑΙ είναι σχεδόν ίσο με το FI.

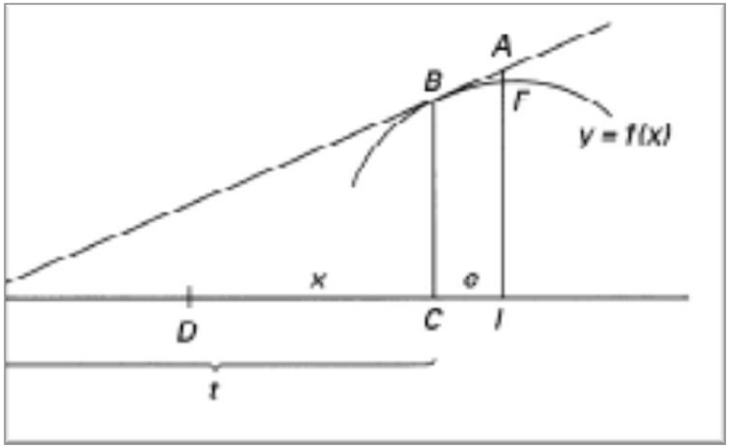
Θέλουμε να βρούμε την κλίση της ΕΑ, δηλ. το BC/EC.

Το τμήμα EC έχει μήκος t, (το t είναι άγνωστο.)

Τονίζουμε ότι ο άξονας των x είναι η ευθεία EC και ότι το τμήμα DC έχει μήκος x.

Το τμήμα BC έχει μήκος $f(x)$.

Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης (2)



Από τα όμοια τρίγωνα AEI και BEC προκύπτει ότι

FI/BC είναι σχεδόν ίσο με EI/EC.

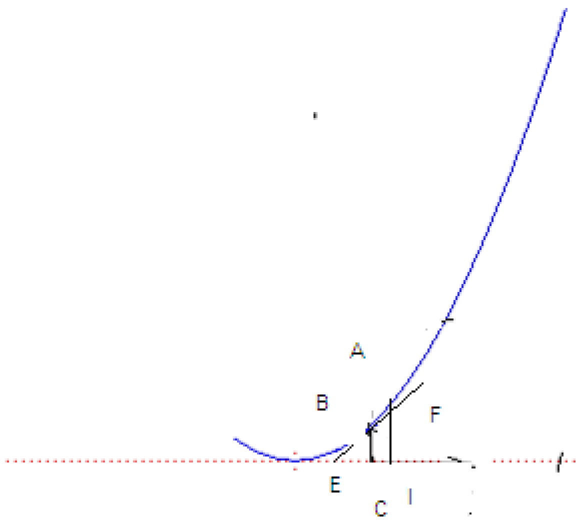
Όταν λοιπόν το e είναι πολύ μικρό τότε

$f(x+e)/f(x)$ **είναι σχεδόν ίσο με** $(t+e)/t$

και επομένως

$t\ f(x+e)$ **είναι σχεδόν ίσο με** $(t+e)\ f(x)$.

Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης (3)



Θα βρούμε την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη $f(x) = x^2$ στο σημείο B: (x_0, x_0^2)

Αφού $\frac{f(x_0+e)}{f(x)} \approx \frac{t+e}{t}$

έπεται ότι

$$tf(x_0 + e) \approx (t + e)f(x_0)$$

και

$$tx_0^2 + 2tx_0e + te^2 \approx tx_0^2 + ex_0^2$$

Άρα $2tx_0e + te \approx x_0^2$

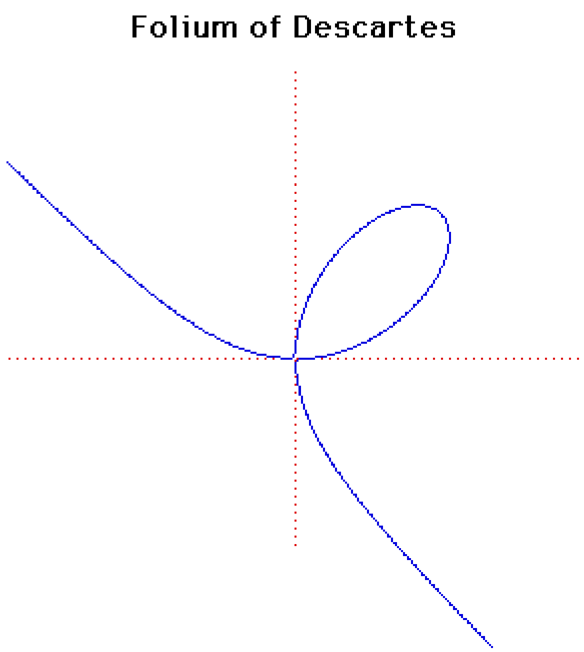
και αν θέσουμε $e = 0$ βρίσκουμε ότι $2t = x_0$. Άρα η κλίση της εφαπτομένης είναι $\frac{x_0^2}{t} = 2x_0$.

Fermat και εφαπτομένη μίας καμπύλης (4)

Ισοδυναμεί η μέθοδος του Fermat με την εύρεση του ορίου

$$\lim_{e\to 0}\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$$

Η καμπύλη του Descartes (1638)



Η καμπύλη του Descartes (1638)
και η πρόκληση
στον Fermat να βρει την
εφαπτομένη.

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Marin mersenne**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Marin_mersenne.jpg#mediaviewer/File:Marin_mersenne.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Frans Hals - Portret van René Descartes**" by After Frans Hals (1582/1583–1666) - André Hatala [e.a.] (1997) De eeuw van Rembrandt, Bruxelles: Crédit communal de Belgique, ISBN 2-908388-32-4.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg#mediaviewer/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

- **Εικόνα 3**: "**Descartes Discours de la Methode**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg#mediaviewer/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg
- **Εικόνα 4**: “La dioptrique”, “Les meteores”, “La geometrie” "GeometryDescartes" by Original uploader was User:Caton at [1] - Originally from fr.wikipedia; description page is/was here.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeometryDescartes.JPG#mediaviewer/File:GeometryDescartes.JPG

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

- **Εικόνα 5**: "**Pierre de Fermat**" by This file is lacking author information. - http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.jpg#mediaviewer/File:Pierre_de_Fermat.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 6.2: Μέθοδοι παραγώγισης. ». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.3: Τετραγωνισμός και εμβαδόν.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.

Σκοποί Ενότητας

- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

Τετραγωνισμός και εμβαδόν (αδιαίρετα + απειροστά)

- Αρχιμήδης για το εμβαδόν παραβολικού τμήματος χρησιμοποίησε τρίγωνα.
- Cavalieri (1635), Fermat +Roberval (1636, αλληλογραφία)



1598-1647
Εικόνα 1



1601-1665
Εικόνα 2



1602-1675
Εικόνα 3

Μέθοδος των «αδιαιρέτων» Cavalieri

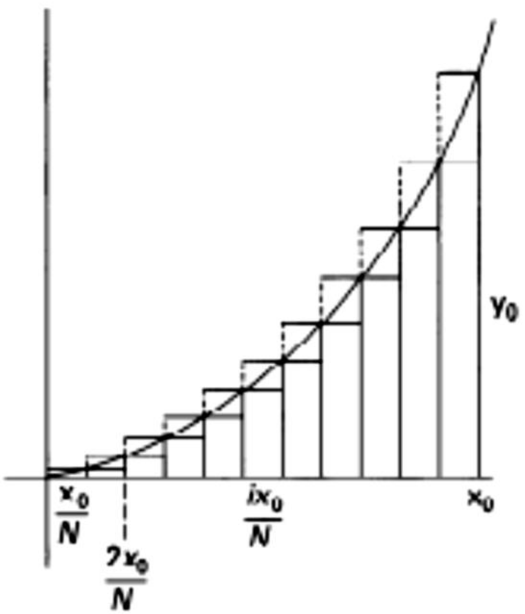
Με τη μέθοδο των «αδιαιρέτων» ο Cavalieri είχε οδηγηθεί στο παρακάτω γενικό συμπέρασμα για το παρακάτω εμβαδό (έχοντας αποδείξει τον τύπο μέχρι και για n=9).

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Οι Fermat και Roberval το απέδειξαν.

Η απόδειξη των Fermat+ Roberval (+ Pascal) (1)

Η απόδειξη των Fermat+ Roberval (+ Pascal)



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν Α της περιοχής κάτω από την παραβολή $y = x^k$, τον άξονα των x και δοθείσα κάθετη στο x_0 θα κατασκευάσουμε ορθογώνια όπως φαίνεται στην εικόνα.

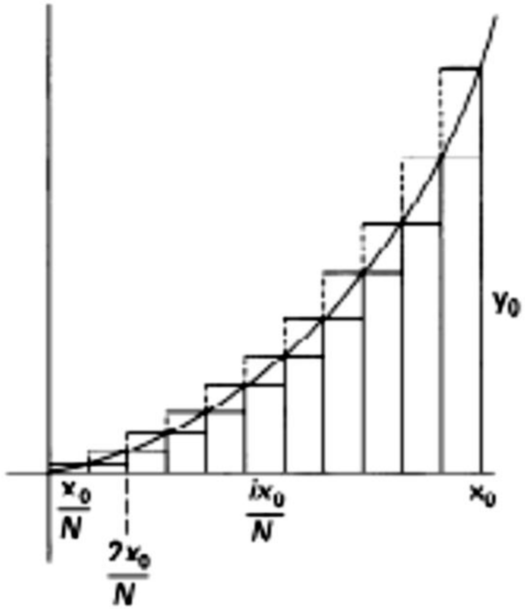
Το i-οστο ορθογώνιο με βάση x_0/Nκαι ύψος $(ix_0/N)^k$ έχει εμβαδόν $\frac{(ix_0)^k}{(N)^k}\frac{x_0}{N}$.

Αθροίζοντας τα εμβαδά των ορθογωνίων έχουμε συνολικά

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}}\left(1^k + \cdots + N^k\right)$$

Αντίστοιχα για τα ορθογώνια με βάση x_0/N και ύψος $\left((i-1)x_0/N\right)^k$ βρίσκουμε το άθροισμα …

Η απόδειξη των Fermat+ Roberval (+ Pascal) (2)



$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}}\left(1^k+\cdots+(N-1)^k\right)=$$

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}}\left(1^k+\cdots+N^k\right)-\frac{x_0^{k+1}}{N}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό A είναι ανάμεσα στις ποσότητες

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}}\left(1^k+\cdots+N^k\right)-\frac{x_0^{k+1}}{N}$$

και

$$\frac{(x_0)^{k+1}}{(N)^{k+1}}\left(1^k+\cdots+N^k\right)$$

Η απόδειξη των Fermat+ Roberval (+ Pascal) (3)

Όμως οι Fermat, Roberval γνώριζαν ότι η έκφραση

$$\frac{\left(1^k + \cdots + N^k\right)}{(N)^{k+1}} \sim \frac{1}{\kappa + 1}$$

οταν το N αυξανόταν.

Έτσι αφού η ποσότητα

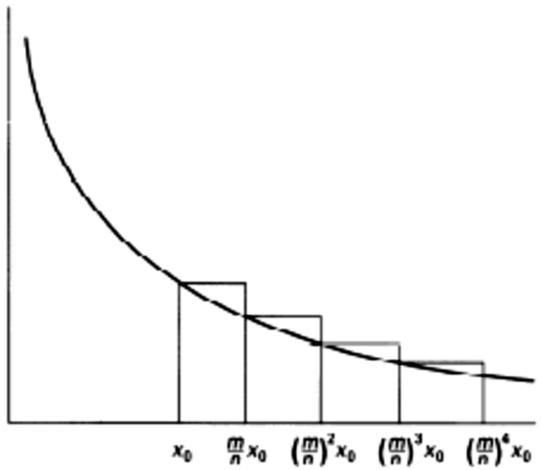
$$\frac{(x_0)^{k+1}}{\mathrm{N}}$$

μπορούσε να γίνει όσο μικρή ήθελαν για κατάλληλο N

Κατέληξαν στο ότι όντως

$$\int_0^{x_0} x^k dx = A = \frac{x_0^{k+1}}{k+1}.$$

Fermat (1)



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν A της περιοχής κάτω από την καμπύλη $y = x^{-k}$, τον άξονα των x και στα δεξιά του x_0 θα κατασκευάσουμε ορθογώνια όπως φαίνεται στην εικόνα. Η βάση του i-οστου ορθογωνίου ορίζεται από $(m/n)^{i-1}x_0$ και $(m/n)^i x_0$ με $m > n$.

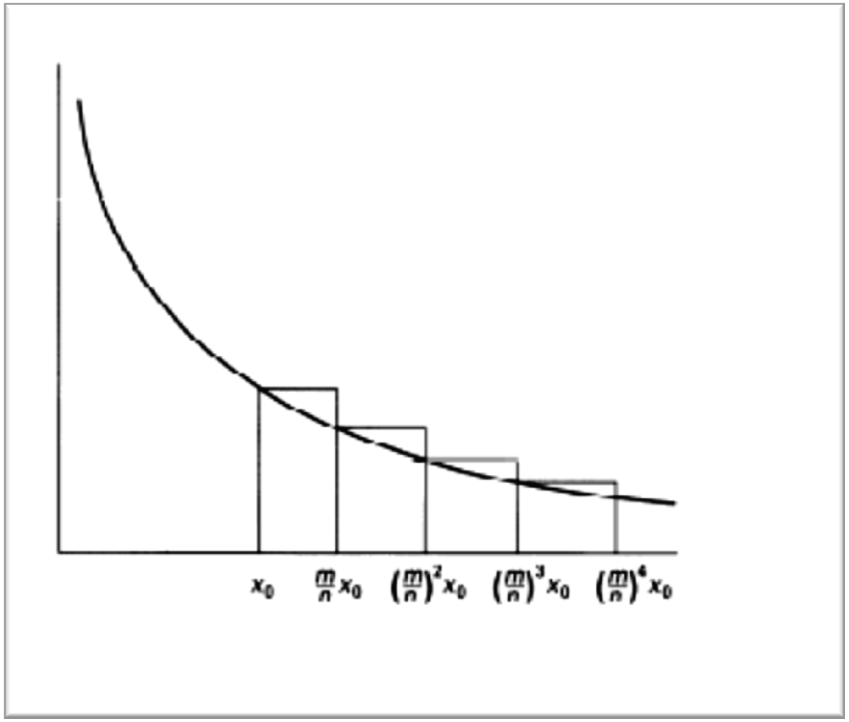
Το εμβαδόν R_1 του πρώτου ορθογωνίου είναι

$$R_1 = x_0\left(\frac{m}{n} - 1\right)x_0^{-k} = \left(\frac{m}{n} - 1\right)x_0^{-k+1}$$

Αν R_i είναι το εμβαδόν του i-ορθογωνίου τότε

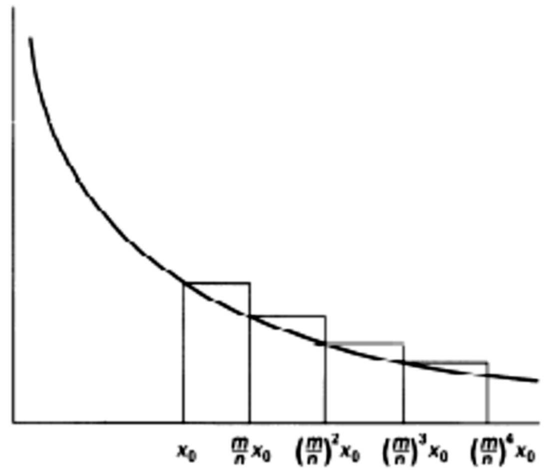
$$R_i = \left(\frac{n}{m}\right)^{(i-1)(k-1)} R_1$$

Fermat (2)



Αθροίζοντας άπειρα εμβαδά ….

Fermat (3)



$$R_1\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)^{(k-1)}+\left(\frac{n}{m}\right)^{2(k-1)}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{x_0^{k-1}}\frac{1}{\frac{n}{m}+\left(\frac{n}{m}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{m}\right)^{(k-1)}}$$

Όταν το $\frac{m}{n}$ τείνει στην μονάδα τότε κάθε όρος $(m/n)^i$ στον παρονομαστή τείνει στην μονάδα και έτσι

$$\mathrm{A}=\frac{1}{k-1}\frac{1}{x_0^{-k+1}}.$$

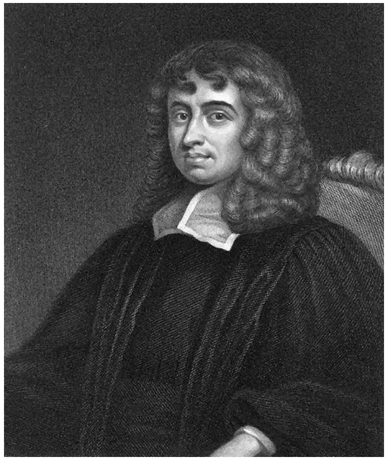
Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού

1. Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.

2. Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

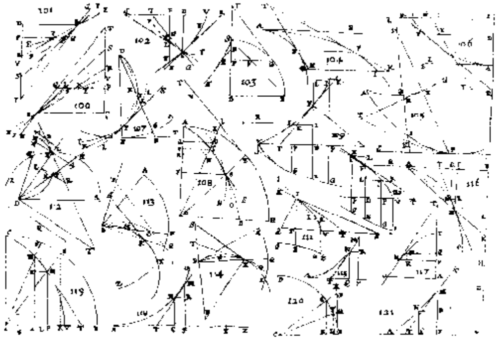
Barrow (1630-1677) (ιερέας)

Καθηγητής αρχαίων Ελληνικών και Μαθηματικών (1663-1669) στο πανεπιστήμιο του Cambridge
εκλέχτηκε: Fellow of Royal Society (1663)



Εικόνα 4

Υποννόησε αντίστροφη σχέση ανάμεσα στα προβλήματα των εφαπτομένων και αυτά του τετραγωνισμού
 (“Lectiones geometricae”)



Εικόνα 5

James Gregory (1638-1675)



Εικόνα 6

(παραγνωρισμένο το έργο του για το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού, σειρές Taylor (δημοσιεύθηκαν από Taylor το 1716) και άλλα πολλά …)

Christian Huygens
Netherlands (1629-1695)



Εικόνα 7

Σημαντική Μαθηματική φυσιογνωμία της εποχής.

Διαμάχη με τον Gregory.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "Bonaventura Cavalieri". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons – http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Bonaventura_Cavalieri.jpeg#mediaviewer/File:Bonaventura_Cavalieri .jpeg
- **Εικόνα 2:** "Pierre de Fermat" by http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.jpg#/media/File:Pierre_de_Fermat.jpg
- **Εικόνα 3:** "Gilles personne de roberval" by TESTELIN Henri detail du tableau de TESTELIN Henri d'après LE BRUN Charles. Licensed under

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

Public domain via Wikimedia Commons – http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gilles_personne_de_roberval.jpg#mediaviewer/File:Gilles_personne_de_roberval.jpg

- **Εικόνα 4:** "Isaac Barrow". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isaac_Barrow.jpg#mediaviewer/File:Isaac_Barrow.jpg
- **Εικόνα 5:** http://www-history.mcs.stand.ac.uk/Bookpages/Barrow7a.gif
- **Εικόνα 6:** "**James Gregory**" by Unknown - http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gregory.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:James_Gregory.jpeg#mediaviewer/File:James_Gregory.jpeg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

- **Εικόνα 7:** "**Christiaan Huygens**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christiaan_Huygens.jpg#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.4: Newton. Το θεώρημα του δυωνύμου.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

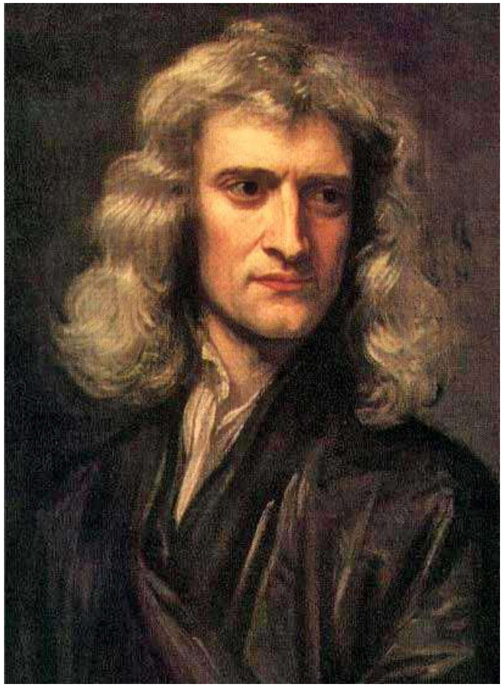
Περιεχόμενα Ενότητας

- Γεωμετρία.
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton, Το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz και το σκάνδαλο του Λογισμού.

Σκοποί Ενότητας

- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

Newton (1642-1727) Άγγλος



Εικόνα 1

Newton (1)

Plato is my friend — Aristotle is my friend — but my greatest friend is truth.

(ημερολόγιο στα Λατινικά, με τίτλο *Quaestiones Quaedam Philosophicae* , 1664)

If I have seen further it is only by standing on the shoulders of giants.

(γράμμα στον Hooke to 1676)

Newton (2)

Κολλέγιο 1661 (Μαθηματικά διαβάσματα 1661-1664)

- «Στοιχεία» Ευκλείδη
- «Geometria a Renato Des Cartes» Schooten
- «Οπτική» Kepler
- έργα του Viete
- «Arithmetica infinitorum» Wallis
- διαλέξεις του Barrow
- έργο των Galilei, Fermat, Huygens

Νεανικά χρόνια

1665

Συναρτήσεις ως δυναμοσειρές.

Ρυθμός μεταβολής μεγεθών ως προς τον χρόνο: fluxion.

1665-1666

Θεώρημα του διωνύμου (περιγραφή σε γράμμα 1676, δημοσίευση από Wallis το1685).

Απειροστικός λογισμός.

Νόμος της βαρύτητας.

Φύση των χρωμάτων.

Θεώρημα του διωνύμου (1)

Θεώρημα του διωνύμου
(ανακάλυψη: 1665, περιγραφή σε δύο γράμματα το 1676, δημοσίευση από τον Wallis το 1685)

Έστω $r \in \mathbb{Q}$.

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

Θεώρημα του διωνύμου (2)

Θεώρημα του Δυωνύμου ήταν γνωστό όταν n είναι θετικός ακέραιος.

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

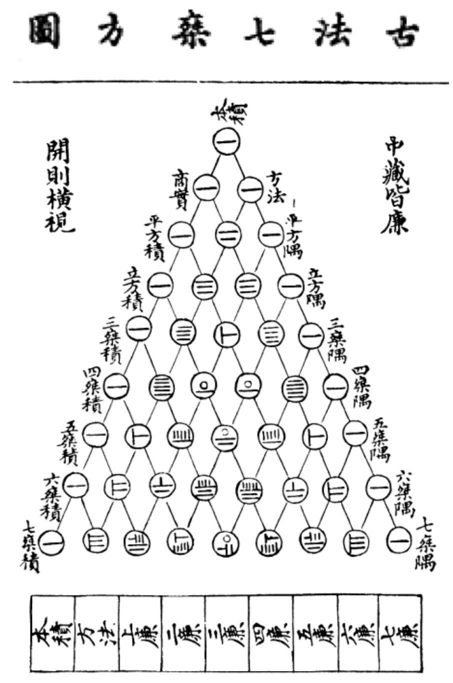
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Τρίγωνο του Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Εικόνα 2

Τρίγωνο του Zhu Shijie



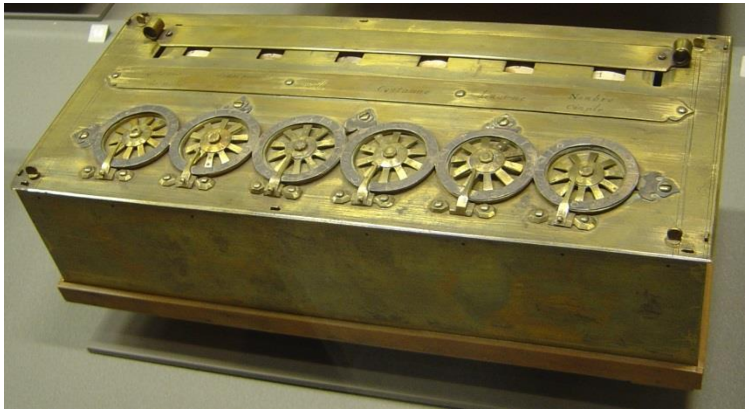
Εικόνα 3

Τρίγωνο του Zhu Shijie, βάθος 8, 1303.

Blaise Pascal (1623-1662)



Εικόνα 4
Blaise Pascal



Εικόνα 5
υπολογιστική μηχανή του Pascal(1642)

Η γενική περίπτωση

Έστω $r \in \mathbb{Q}$

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

Όταν r είναι θετικός ακέραιος, τότε το άθροισμα είναι πεπερασμένο.

Διαφορετικά το άθροισμα είναι άπειρο.

Πότε συγκλίνει αυτή η σειρά?

Παράδειγμα για n= - 1

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

- $\binom{-1}{0} = 1$
- $\binom{-1}{1} = (-1)$
- $\binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1$
- $\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1$
- $\binom{-1}{4} = 1$

$$\frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

Παράδειγμα για n=1/2

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-k+1)}{k!}$$

- $\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$
- $\binom{1/2}{2} = \frac{1/2(1/2-1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2} = \frac{-1}{8}$
- $\binom{1/2}{3} = \binom{1/2}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3} = \frac{-1}{8}\frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3} = \frac{-1}{8}\frac{(-3/2)}{3} = \frac{1}{16}$

Παράδειγμα για n=1/2 συνέχεια

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2(1/2-1)\ldots(1/2-k+1)}{k!}$$

$$(1-x^2)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-x^2)^k =$$

$$= \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}(-x^2) + \binom{1/2}{2}(-x^2)^2 + \binom{1/2}{3}(-x^2)^3 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$$

Θεώρημα του διωνύμου (3)

Θεώρημα του διωνύμου

(ανακάλυψη: 1665, περιγραφή σε δύο γράμματα το 1676, δημοσίευση από τον Wallis το 1685)

Έστω $r \in \mathbb{Q}$.

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

$$\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

Ερωτήματα

Άπειρη σειρά: Σύγκλιση?

Γιατί το Δυωνυμικό Θεώρημα θεωρείται τόσο σημαντικό?

Πως ήρθε στον Νεύτωνα η έμπνευση?

Έδωσε ο Νεύτωνας πλήρη απόδειξη του Θεωρήματος?

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis) (1)

Ο Wallis ενδιαφερόταν να βρεί τρόπο για να υπολογίσει τα εμβαδά κάτω από καμπύλες της μορφής $(1-t^2)^n$ από το 0 έως δοθέντα α, ιδιαίτερα αφού

$$\int_0^1 (1-t^2)^{1/2} dt = \frac{\pi}{4}$$

Μπορούσε να το κάνει για ακέραιες τιμές του n, αλλά όχι για κλασματικές. Η έμπνευση του Newton ήταν αρχικά να υπολογίσει για διάφορες τιμές του n το αντίστοιχο εμβαδόν από το 0 μέχρι κάποιον άγνωστο x.

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis) (2)

Ας μελετήσουμε τον πίνακα που τα στοιχεία του στην i-στη γραμμή και j-στήλη είναι ο συντελεστής του

$$(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$

όπως εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^x (1-t^2)^j dt$$

Ξεκινάμε μετρώντας με τη στήλη 0.

Ο συντελεστής του x είναι 1.

0	1	2	3	4	⋯		
1	1	1	1	1	⋯	|	x
0	1	2	3	4	⋯	|	$-\frac{x^3}{3}$
0	0	1	3	6	⋯	|	$\frac{x^5}{5}$
0	0	0	1	4	⋯	|	$-\frac{x^7}{7}$
0	0	0	0	1	⋯	|	$\frac{x^9}{9}$

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis) (3)

Ο συντελεστής του $-x^3/3$ όταν $j = n$ είναι n.
Για την τρίτη γραμμή, δηλαδή για τον συντελεστή του $x^5/5$ οι συντελεστές είναι 0 1 3 6 …
Ο Newton κατάλαβε ότι οι 1 3 6 10 … είναι τριγωνικοί αριθμοί (δηλ. οι αριθμοί οι οποίοι προκύπτουν από πεπερασμένα αθροίσματα $1 + 2 + \cdots + j$ και υπέθεσε ότι στο ολοκλήρωμα του $\int_0^x (1-t^2)^n dt$ ο συντελεστής του $x^5/5$ είναι $\frac{n(n-1)}{2}$).
Δείτε ότι οι συντελεστές του $x, -x^3/3, x^5/5,$ στη στήλη j, προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε j στα εξής πολυώνυμα $1, n, 1/2(n^2-n)$: Οι βαθμοί των πολυωνύμων είναι αντίστοιχα 0,1 και 2.

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (4)

Για την 4η γραμμή (δηλαδή στη γραμμή των συντελεστών του $-x^7/7$ και που αρχίζει με 3 μηδενικά) ο Newton υπέθεσε ότι τα στοιχεία καθορίζονται από ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού που έχει ρίζες στο 0,1,2. Το πολυώνυμο θα έχει τη μορφή

$$cn(n-1)(n-2), c\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha.$$

Αφού η τιμή στην τρίτη στήλη είναι 1, με $n = 3$ προκύπτει

$$1 = c3(3-1)(3-2) = 6c \Longrightarrow c = \frac{1}{6}$$

Έτσι ο Newton υπέθεσε ότι ο συντελεστής του $-x^7/7$ στο $\int_0^x (1-t^2)^n dt$ είναι

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \binom{n}{3}$$

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (5)

Συνέχισε και για κάθε n και για κάθε θετικό ακέραιο k υπέθεσε ότι στον τετραγωνισμό $\int_0^x (1-t^2)^n dt$ εμφανίζεται ο όρος

$$(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

με συντελεστή $\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Γενίκευσε τα παραπάνω και για την περίπτωση που ο n δεν είναι ακέραιος. Δηλαδή υπέθεσε ότι για κάθε δύναμη n ισχύει

$$\int_0^x (1-t^2)^n dt = x - \binom{n}{1}\frac{x^3}{3} - \binom{n}{2}\frac{x^5}{5} - \binom{n}{3}\frac{x^7}{7} - \cdots$$

όπου $\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (6)

Ειδικότερα συμπέρανε ότι για $n = 1/2$

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}dt = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{8}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{16}\frac{x^7}{7} - \cdots .$$

Στη συνέχεια παρατήρησε ότι αν κάποιος ξεκινήσει με την σειρά

$1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{16}t^6 - \cdots$

Τετραγωνίσει (ολοκληρώσει) κάθε όρο και αθροίσει, καταλήγει στη σειρά που βρήκε ξεκινώντας από το ολοκλήρωμα $\int_0^x (1-t^2)^{1/2}dt$.

Συμπέρανε ότι $(1-t^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{16}t^6 - \cdots$.

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (7)

Για να βεβαιωθεί ο Newton πολλαπλασίασε

$$\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots\right)$$

και βρήκε ότι όντως

$$1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{1}{8}+\frac{11}{22}-\frac{1}{8}\right)x^4+\cdots$$
$$=1-x^2+0+\cdots=1-x^2$$

Σχόλιο για την έμπνευση: (το έργο του Wallis)- (8)

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$$

Αποτελούν τα παραπάνω **απόδειξη** ότι η σειρά που δόθηκε για τη συνάρτηση

$$(1-x^2)^{1/2}$$

είναι σωστή?

Δυωνυμικό Θεώρημα

Έστω $r \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{Z}^+$

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

Παρατηρείστε τη σχέση ανάμεσα στις σειρές και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων!

Εφαρμογή του Δυωνυμικού Θεωρήματος (Newton)

Προσέγγιση ριζών

$$7 = 9\frac{7}{9} = 9\left(1 - \frac{2}{9}\right)$$

$$\sqrt{7} = 3\sqrt{1 - \frac{2}{9}} = 3\left(1 - \frac{2}{9}\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{7} \approx 3\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{162} - \frac{1}{1458} - \frac{5}{52488} - \frac{7}{472392}\right)$$

$$\approx 2.64576$$

Απειροσειρές (και άπειρο)

- Απειροσειρές (και άπειρο)
- συνέβαλλαν στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού.
- υπακούνε τους ίδιους γενικούς κανόνες όπως τα πεπερασμένα αθροίσματα.
- θεωρούνται εναλλακτικές μορφές των συναρτήσεων.

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas

(Newton: 1669, δημοσιεύθηκε το 1711)

Περιεχόμενα

- Απειροσειρές.
- Πρώτη περιγραφή του απειροστικού λογισμού.

Οι βασικές ιδέες του λογισμού του Newton έχουν να κάνουν με κίνηση.
Θεωρεί ότι οι ποσότητες-μεταβλητές μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο. Το fluxion μίας μεταβλητής x είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του x και συμβολίζεται με p.
Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα o, το x μεταβάλλεται κατά op.
Αντίστοιχα αν το fluxion του y είναι q τότε το y μεταβάλλεται κατά oq.
Η κλίση της καμπύλης $f(x, y) = 0$, (δηλ. η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης) είναι ίση με $oq/op = q/p$.

Newton



Εικόνα 6

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**GodfreyKneller-IsaacNewton-1689**" by Sir Godfrey Kneller - http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg#mediaviewer/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Pascal triangle**" by Kazukiokumura (talk) - Created by Kazukiokumura (talk).. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0-2.5-2.0-1.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pascal_triangle.svg#mediaviewer/File:Pascal_triangle.svg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

- **Εικόνα 3**: "**Yanghui triangle**" by Yáng Huī (楊輝), ca. 1238–1298) - [1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yanghui_triangle.gif#mediaviewer/File:Yanghui_triangle.gif
- **Εικόνα 4**: "Blaise pascal". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blaise_pascal.jpg#mediaviewer/File:Blaise_pascal.jpg
- **Εικόνα 5**: "Arts et Metiers Pascaline dsc03869" by Blaise Pascal. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Arts_et_Metiers_Pascaline_dsc03869.jpg#mediaviewer/File:Arts_et_Metiers_Pascaline_dsc03869.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

- **Εικόνα 6**: **Newton** 25" by James Thornhill - Transferred from en.wikipedia to Commons by User:Shizhao using CommonsHelper.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton_25.jpg#mediaviewer/File:Newton_25.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 6.4: Newton. Το θεώρημα του δυωνύμου». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.5: Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία.
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.

Σκοποί Ενότητας

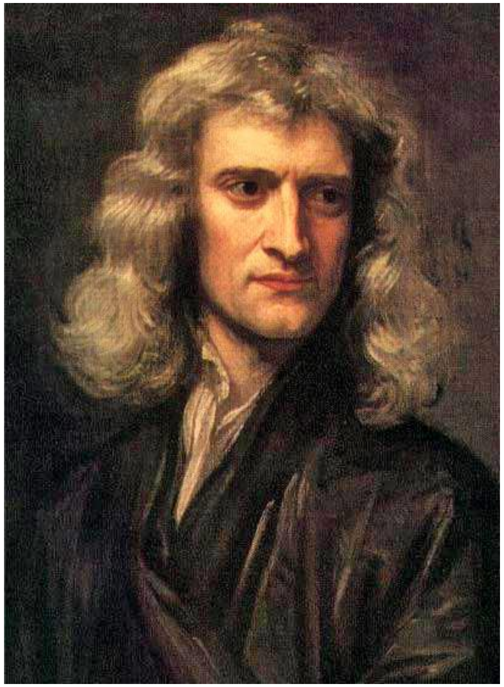
- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού (1)

1. Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.

2. Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

Newton (1642-1727) Άγγλος



Εικόνα 1

Newton



Εικόνα 2

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas

(Newton: 1669, δημοσιεύθηκε το 1711)

Περιεχόμενα

- Απειροσειρές.
- Πρώτη περιγραφή του απειροστικού λογισμού.

Οι βασικές ιδέες του λογισμού του Newton έχουν να κάνουν με κίνηση.

Θεωρεί ότι οι ποσότητες-μεταβλητές μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο. Το fluxion μίας μεταβλητής x είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του x και συμβολίζεται με p.

Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα o, το x μεταβάλλεται κατά op.

Αντίστοιχα αν το fluxion του y είναι q τότε το y μεταβάλλεται κατά oq.

Η κλίση της καμπύλης $f(x, y) = 0$, (δηλ. η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης) είναι ίση με $oq/op = q/p$.

Παράδειγμα

- Κλίση της καμπύλης $y^3 = x^2$.

$$(y + oq)^3 = (x + op)^2 \Rightarrow$$

$$y^3 + 3y^2(oq) + 3y(oq)^2 + (oq)^3 = x^2 + 2x(op) + (op)^2 \Rightarrow$$

$$y^3 + 3y^2oq + 3yo^2q^2 + o^3q^3 = x^2 + 2xop + o^2p^2 \Rightarrow$$

$$3y^2oq + 3yo^2q^2 + o^3q^3 = 2xop + o^2p^2 \Rightarrow$$

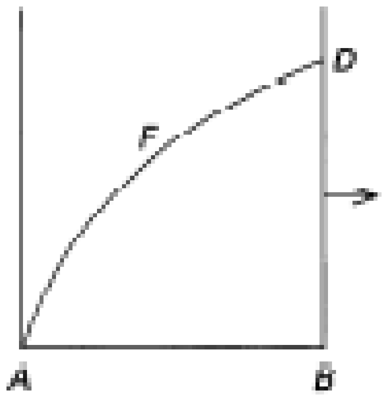
$$3y^2q + 3yoq^2 + o^2q^3 = 2xp + op^2 \Rightarrow$$

$$3y^2q = 2xp \Rightarrow$$

← Ιδέα του ορίου όταν ο χρόνος ο τείνει στο μηδέν.

$$\frac{q}{p} = \frac{2x}{3y^2} = \frac{2x}{3(x^{2/3})^2} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

Newton και τετραγωνισμοί:
θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού



Ο Newton θεωρούσε ότι η καμπύλη AFD παράγεται από τις κινήσεις των x και y.
Έτσι το εμβαδόν AFDB παράγεται από την κίνηση της κάθετης DB.
Επομένως το fluxion του AFDB (δηλ. ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του AFDB) είναι ίσος με το DB επί το fluxion του x.

Tractatus de methodis serierum et fluxionum

“θα παραστήσουμε τα fluxions με μία τελεία πάνω από το γράμμα. Έτσι αν z είναι το ζητούμενο εμβαδόν τότε $\dot{z}$ είναι το fluxion z ενώ $\dot{x}$ είναι το fluxion του x. Ισχύει λοιπόν ότι

$$\dot{z} = y\dot{x} \Rightarrow \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y$$

(Μετάφραση: αν $A(x)$ είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ από το $x = 0$ έως το x τότε $dA/dx = f(x)$)”

Αδημοσίευτη μελέτη: Tractatus de methodis serierum et fluxionum (1671)

Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού (2)

1. Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Τότε $F'(x) = f(x)$.

2. Αν $g'(x) = f(x)$ τότε $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

Πίνακες με ολοκληρώματα

- Ο Newton έδωσε πίνακες με ολοκληρώματα:

Για παράδειγμα οι πίνακες περιείχαν τα παρακάτω ολοκληρώματα των y:

$$y = \frac{ax^{n-1}}{(b+cx^n)^2} \qquad z = \frac{(a/nb)x^n}{b+cx^n}$$

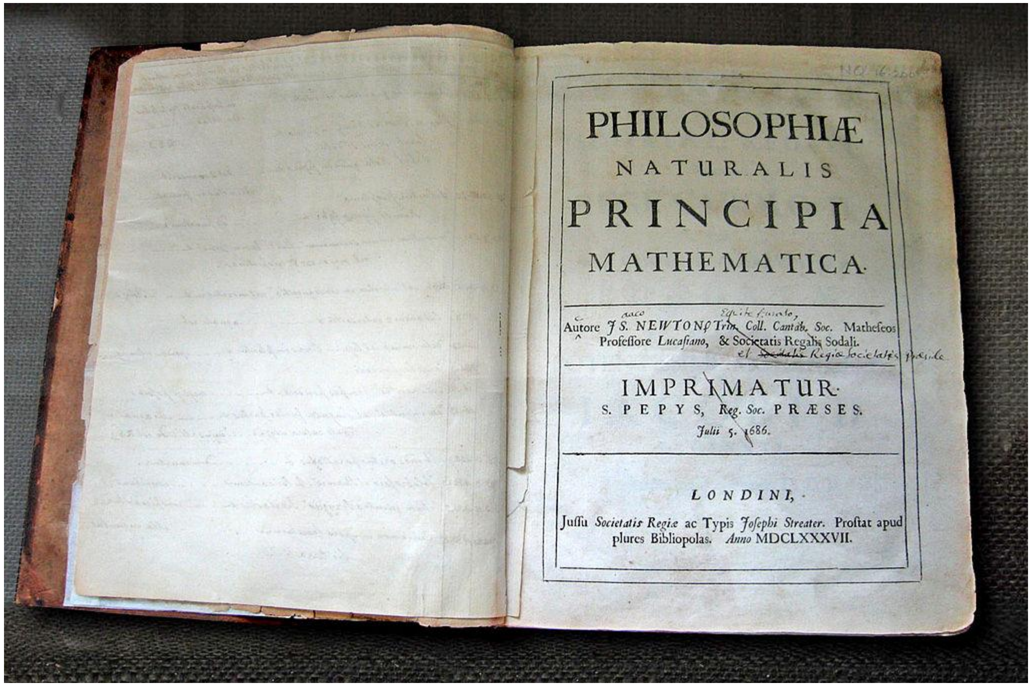
$$y = ax^{n-1}\sqrt{b+cx^n} \qquad z = \frac{2a}{3nc}(b+cx^n)^{3/2}$$

$$y = ax^{2n-1}\sqrt{b+cx^n} \qquad z = \frac{2a}{nc}\left(-\frac{2}{15}\frac{b}{c}+\frac{1}{5}x^n\right)(b+cx^n)^{3/2}$$

$$y = \frac{ax^{2n-1}}{\sqrt{b+cx^n}} \qquad z = \frac{2a}{nc}\left(-\frac{2}{3}\frac{b}{c}+\frac{1}{3}x^n\right)\sqrt{b+cx^n}$$

Επίσης περιέγραψε διάφορες τεχνικές για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Newton’s Principia



Εικόνα 3

1687 Η Principia παρουσιάζει τις βάσεις της φυσικής και της αστρονομίας στη γλώσσα της γεωμετρίας.

Principia (1)

Αν και το βιβλίο Principia δεν είναι κατά κυριότητα ένα βιβλίο για μαθηματικά, (περισσότερο ένα βιβλίο εφαρμογής μαθηματικών), σε αυτό συναντάμε:

- Ορισμό ορίου μίας συνάρτησης (προσπάθεια).
- Αναφορές σε δυναμοσειρές.
- Αλγόριθμους απειροστικού λογισμού (παράγωγο γινομένου συναρτήσεων, δύναμης και αντιστρόφου, κλπ).
- Θεωρήματα για κωνικές τομές (γεωμετρία).

Η πρώτη δημοσιευμένη εργασία του Newton για τον λογισμό όπου περιγράφει αναλυτικά το θεμελιώδες θεώρημα ήταν στη De Quadratura Curvarum, (1704), παράρτημα στο Opticks.

Principia (2)

Η Principia περιλαμβάνει τους νόμους κίνησης και την μαθηματική απόδειξη του **Νόμου της Βαρύτητας**: *δύο σώματα έλκουν το ένα το άλλο με δύναμη που εξαρτάται από το αντίστροφο του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης*

καθώς και πολλά άλλα…(Νευτώνεια άποψη για το σύμπαν…)

Enumeratio linearum tertii ordinis (1704) (δεύτερο μαθηματικό παράρτημα στο Opticks)

(…μέθοδο του Newton για την εύρεση προσεγγιστικά μίας λύσης εξισώσεων)

Διαμάχη για την πατρότητα του λογισμού



Εικόνα 4

Σημαντική η διαμάχη για την πατρότητα του λογισμού (από το 1695 και για πολλά χρόνια αργότερα) που περιλάμβανε κατηγορίες εναντίον του Leibniz για λογοκλοπή.
(Θλιβερό αποτέλεσμα): αποξένωση των Βρετανών μαθηματικών από τους Ευρωπαίους μαθηματικούς κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα.

Leibniz



Εικόνα 5

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**GodfreyKneller-IsaacNewton-1689**" by Sir Godfrey Kneller - http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg#mediaviewer/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Newton** 25" by James Thornhill - Transferred from en.wikipedia to Commons by User:Shizhao using CommonsHelper.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton_25.jpg#mediaviewer/File:Newton_25.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 3**: "**NewtonsPrincipia**". Licensed under CC BY-SA 2.0 via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NewtonsPrincipia.jpg#/media/File:NewtonsPrincipia.jpg
- **Εικόνα 4:** "**Newton** 25" by James Thornhill - Transferred from en.wikipedia to Commons by User:Shizhao using CommonsHelper.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton_25.jpg#mediaviewer/File:Newton_25.jpg
- **Εικόνα 5**: "**Gottfried Wilhelm von Leibniz**" by Christoph Bernhard Francke - /gbrown/philosophers/leibniz/BritannicaPages/Leibniz/LeibnizGif.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg#mediaviewer/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 6.5: Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6: Οι αρχές του Απειροστικού Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 6.6: Leibniz και το σκάνδαλο του Λογισμού.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Σκέφτομαι άρα υπάρχω…Αναλυτική Γεωμετρία
- Μέθοδοι παραγώγισης.
- Τετραγωνισμός και Εμβαδόν.
- Newton και το θεώρημα του δυωνύμου.
- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.
- Leibniz, Το σκάνδαλο του Λογισμού: Newton και Leibniz.

Σκοποί Ενότητας

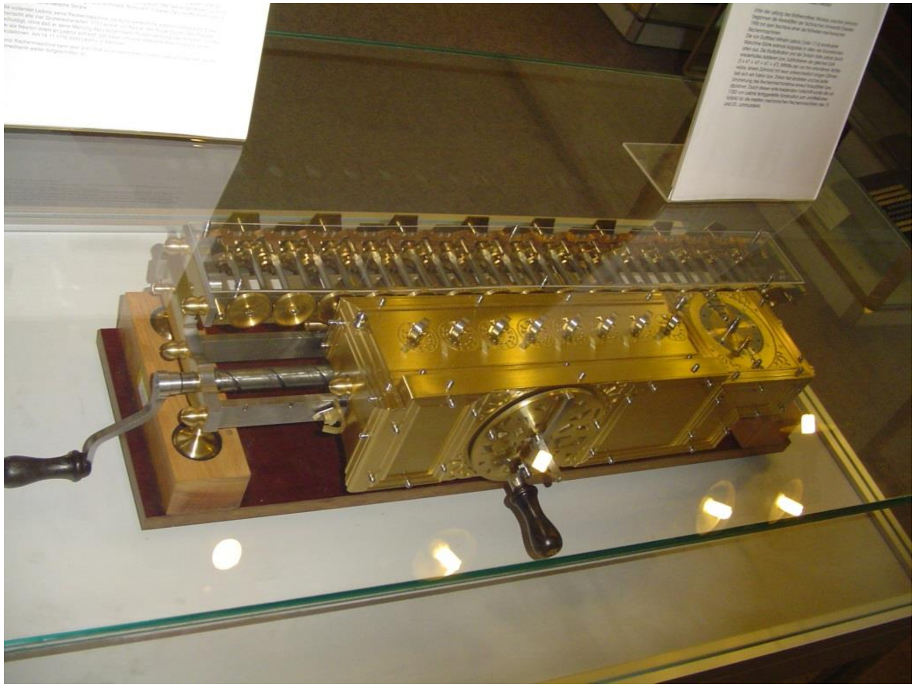
- Η ενότητα αυτή επιχειρεί να εξιστορήσει τη γέννηση του απειροστικού Λογισμού, από τις μεθόδους παραγώγισης και τετραγωνισμού των Descartes, Fermat έως τη διατύπωση του θεμελιώδους Θεωρήματος και το έργο των Newton και Leibniz.

Leibniz (1646-1716)



Εικόνα 1

Υπολογιστική μηχανή του Leibniz (1673)



Εικόνα 2

Βασικός στόχος του Leibniz ήταν η δημιουργία ενός συστήματος συμβολισμών και ορολογίας που θα κωδικοποιούσε και θα απλοποιούσε τα βασικά στοιχεία της λογικής σκέψης.

Παρίσι (1672)

Ο Huygens του ζήτησε να υπολογίσει το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{2}+\frac{2}{6}+\frac{2}{12}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots$$



Εικόνα 3
Huygens
(1629-1695)

$$\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

← Οι όροι αυτής της σειράς είναι οι αντίστροφοι των τριγωνικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=2$$

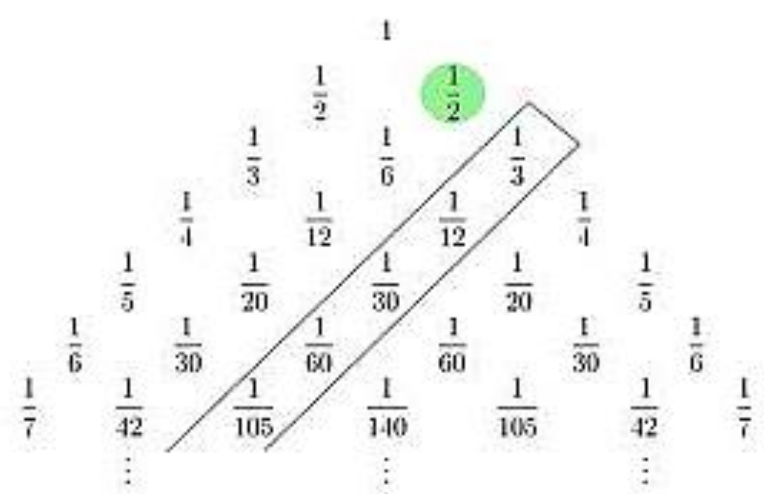
← Λύση του Leibniz

Τρίγωνο του Pascal και Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz.

Τρίγωνο του Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz.
Πως συνδέονται τα δύο τρίγωνα?



Σημασία ενός καλού συμβολισμού (Leibniz)

Τύπος για την παράγωγο της σύνθεσης συναρτήσεων:

$$h(x) = f\big(g(x)\big) \text{ τότε } h'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Με τον συμβολισμό των διαφορικών του Leibniz ο κανόνας προκύπτει με φυσικό τρόπο. Έστω $u = g(x)$ και $y = f(x)$.

Τότε ο παραπάνω τύπος αντιστοιχεί στη σχέση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

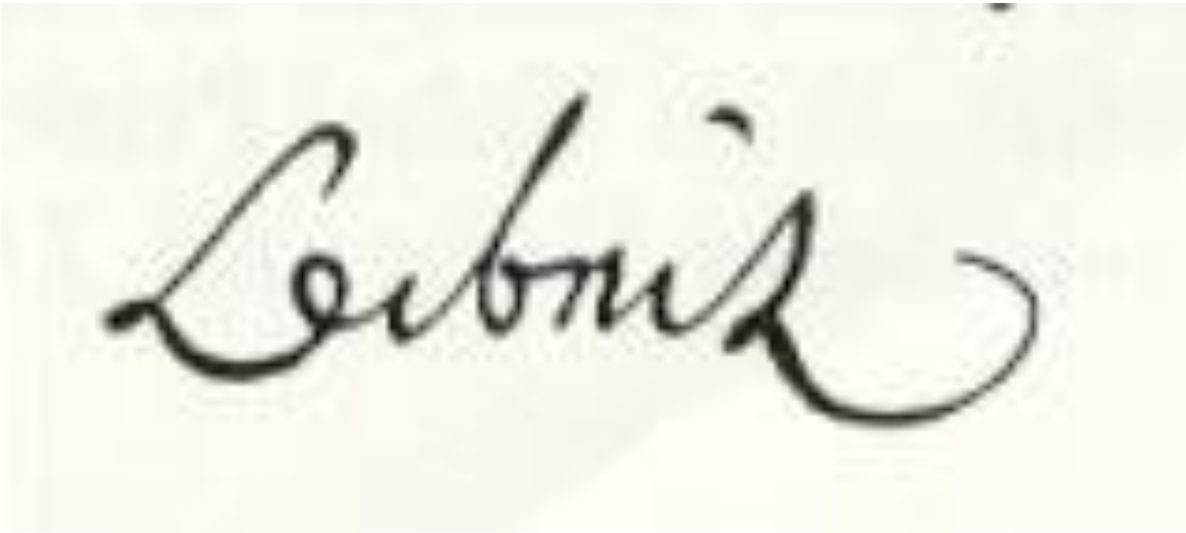
Ο τύπος τώρα είναι αναμενόμενος.

Επίσης γραμμένος έτσι ενέχει υπόδειξη για την απόδειξή του.

Leibniz

- Ο Leibniz στις εργασίες του δίνει τύπους για τα διαφορικά γινομένων, δυνάμεων, ριζών και γεωμετρικές εφαρμογές.
- Τονίζει την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στην παραγώγιση και την ολοκλήρωση στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού.
- Η αληθοφάνεια της μεθόδου του Leibniz και η αποτελεσματικότητα του διαφορικού συμβολισμού έκαναν πιο εύκολα αποδεκτά τα διαφορικά του Leibniz από τα fluxions του Newton.

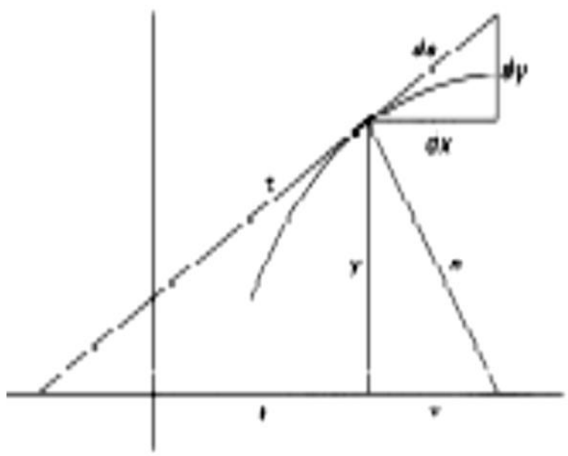
Υπογραφή Leibniz



Εικόνα 4

Ο Διαφορικός Λογισμός του Leibniz Acta Eruditorum (1684)

Διαφορικό τρίγωνο του Leibniz



Όμοια τρίγωνα:

$$ydy = vdx$$

$$\int ydy = \int vdx$$

Παρατήρηση: το εμβαδό $\int ydy$ είναι γνωστό (ως προς y).
Εάν θέλουμε λοιπόν να βρούμε το εμβαδό $\int vdx$ θα πρέπει να βρούμε μία καμπύλη $y = f(x)$ έτσι ώστε $v = ydy/dx$:
Δηλαδή για να λυθεί ένα πρόβλημα τετραγωνισμού, θα πρέπει να λύσουμε ένα πρόβλημα παραγώγισης!

Παράδειγμα (1/2)

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό

$$\int_0^a x^n dx$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Leibniz.

Θέλουμε να βρούμε την καμπύλη $y = f(x)$ (αν υπάρχει) που περνά από την αρχή των αξόνων έτσι ώστε $\nu = x^n$. Παρατηρείτε ότι το ν προκύπτει από τη σχέση

$$\nu = y\frac{dy}{dx}$$

και ότι

Παράδειγμα (2/2)

$$\int_0^a v dx = \int_0^a x^n dx = \int y dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^a = \frac{1}{2}f(a)^2$$

Έστω $y = f(x) = bx^k$ για κάποια σταθερά b και κάποια δύναμη k.

Τότε $v = y\frac{dy}{dx} = bx^k\left(bkx^{k-1}\right) = b^2kx^{2k-1}$.

Αφού ν $= x^n$ έπεται ότι $2k - 1 = n, b^2k = 1$και

$$k = \frac{1}{2}(n+1), b = \left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^{-1/2}.$$

Άρα $\int_0^a x^n dx = \frac{1}{2}\left(ba^k\right)^2 = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Σύγκριση

Σύγκριση των δύο Λογισμών:

- του Newton
- του Leibniz

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Gottfried Wilhelm von Leibniz**" by Christoph Bernhard Francke - /gbrown/philosophers/leibniz/BritannicaPages/ Leibniz/LeibnizGif.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg#mediaviewer/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Leibnitzrechenmaschine**" by User:Kolossos - recorded by me in de:Technische Sammlungen der Stadt Dresden (with photo permission). Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leibnitzrechenmaschine.jpg #mediaviewer/File:Leibnitzrechenmaschine.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 3:** "**Christiaan Huygens**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Christiaan_Huygens.jpg#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg
- **Εικόνα 4**: "**Leibnitz signature**" by Gottfried Wilhelm Leibniz - http://www.deewhybooks.com.au/directory/signatures.cfm.

  Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons –

  http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leibnitz_signature.jpg#/media/File:Leibnitz_signature.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 7: Κλασσική Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 7.1: Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.
- Πέντε βασικά ερωτήματα και η Συμβολική Άλγεβρα.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει την ιστορική σημασία του Θεμελιώδους Θεωρήματος τις Άλγεβρας και να παρουσιάσει την εισαγωγή της Συμβολικής Άλγεβρας.

Ερωτήματα (1)

Ποια είναι η πρόοδος στην Άλγεβρα την εποχή αυτή?

Η Άλγεβρα μέχρι τώρα ασχολείται με εύρεση ριζών για πολυωνυμικές εξισώσεις.

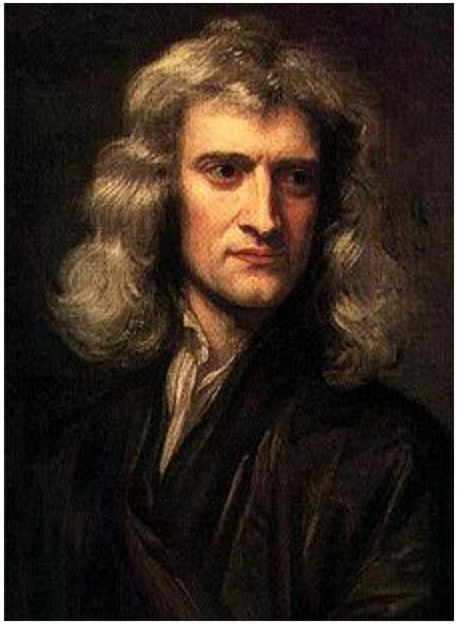
Άλγεβρα (1)



Francois Viete
Εικόνα 1



René Descartes
Εικόνα 2



Isaac Newton
Εικόνα 3



Leibniz
Εικόνα 4

Άλγεβρα (2)



Jean le Rond d‘ Alembert
Εικόνα 5



Euler
Εικόνα 6



George Peacock
Εικόνα 7



Carl Friedrich Gauss
Εικόνα 8

Ανάπτυξη της θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων

Χάρις στο έργα των Viete (16ος αιώνας) και Descartes (17ος αιώνας) ξεκινά η ανάπτυξη της θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων.

1. Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα?
2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n?
3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?
4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του?
5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

1. **Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα?**

Απάντηση: Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές έχει μία μιγαδική ρίζα.

$$\Updownarrow$$

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού 1 με μιγαδικούς συντελεστές.

$$\Updownarrow$$

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού 1 ή 2 με πραγματικούς συντελεστές.

Ερωτήματα (2)

Πως προκύπτουν οι παραπάνω συνεπαγωγές? (από πότε γνώριζαν οι Μαθηματικοί ότι τα παραπάνω είναι ισοδύναμα?)

Γιατί το Θεώρημα αυτό λέγεται Θ.Θ. Άλγεβρας? Είναι τόσο σημαντικό? Πάνω σε αυτό στηρίχτηκε η Άλγεβρα? (Σύγκριση με το Θ.Θ. Λογισμού.)

Αποδείξεις του ΘΘΑ

Αποδείξεις του ΘΘΑ

- 1746 D’Alembert

ελλειπείς

- 1746 Euler
- 1799 Gauss (3 άλλες αποδείξεις, τελευταία το 1849)

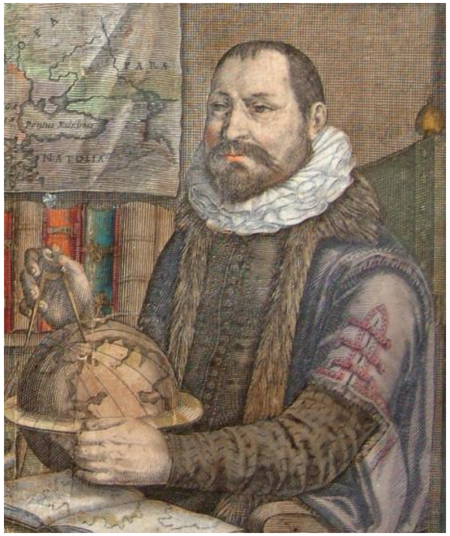
Σε κάθε απόδειξη χρησιμοποιείται το ακόλουθο αποτέλεσμα από την ανάλυση: κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία πραγματική ρίζα.

Αποδείξεις του ΘΘΑ συνέχεια

- Η απόδειξη του ΘΘΑ είναι απόδειξη ύπαρξης : δεν κατασκευάζεται η ρίζα αλλά αποδεικνύεται η ύπαρξή της. Αυτό τον 19^{o} αιώνα ήταν πρωτόγνωρο και τέτοιου είδους αποδείξεις ακόμα και τον 20^{o} αιώνα ήταν αμφισβητήσιμες.

Girard

- Ο Girard (1595-1632) στο βιβλίο του *L'invention en algèbre* το 1629 ισχυρίστηκε ότι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού n έχουν n ρίζες. (Όμως δεν έγραψε ξεκάθαρα ότι οι ρίζες αυτές είναι μιγαδικές).



Εικόνα 9

Δύο ζητήματα

- Δύο ζητήματα:

- Έχει κάθε πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές (κάπου) μία ρίζα?
- Είναι οι ρίζες της εξίσωσης (αν υπάρχουν)μιγαδικοί αριθμοί?

Descartes

Descartes: (1596-1650) το 1637 στο βιβλίο του *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* παρατήρησε ότι: «κάθε εξίσωση <u>μπορεί</u> να έχει τόσες ρίζες όσος είναι ο αριθμός των διαστάσεων της άγνωστης ποσότητας στην εξίσωση.»



Εικόνα 10

Leibniz

Ο Leibniz το 1702 ισχυρίστηκε ότι το πολυώνυμο $x^4 + a^4$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο γραμμικών ή δευτεροβάθμιων όρων, (άρα το ΘΘΑ δεν ισχύει).
Γιατί όμως έκανε αυτό το λάθος ο Leibniz?
Ποια είναι αυτά τα πολυώνυμα? Δοκιμάστε να βρείτε τα πολυώνυμα όταν

$$a = i$$



Εικόνα 11

Newton

Newton:

αν $a + bi$ ρίζα του $p(x)$ τότε $a - bi$ ρίζα του $p(x)$.



Εικόνα 12

Euler (1707-1783)

Ο Euler (1707-1783) σε αλληλογραφία με τους Bernoulli και Goldbach το 1742 έδειξε ότι το αντιπαράδειγμα του Leibniz ήταν λάθος.



Εικόνα 13

D’ Alembert (1717-1783)

D’ Alembert (1717-1783) έκανε το 1746 τη πρώτη (σοβαρή) απόπειρα να αποδείξει του ΘΘΑ. Η απόδειξη αυτή είχε κενά—για παράδειγμα χρησιμοποίησε ένα θεώρημα σε σειρές που αποδείχτηκε το 1850 (Puiseux).



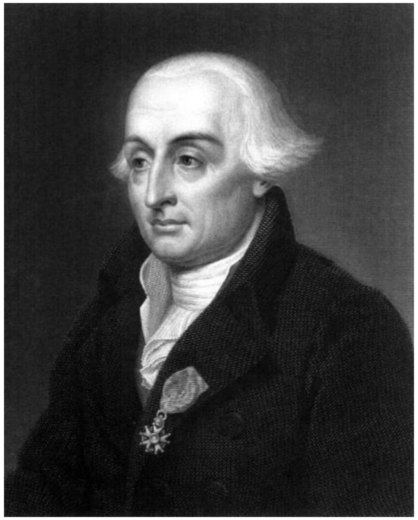
Εικόνα 14

Αποδείξεις

- Euler επιχείρησε μία άλλη απόδειξη το 1749. (Μπορούσε να αποδείξει ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό n μικρότερο ή ίσο του 6 είχε ακριβώς n μιγαδικές ρίζες. Στη γενική περίπτωση έδωσε σκίτσο απόδειξης.
- Το 1772 ο Lagrange έδειξε μία ατέλεια της απόδειξης του Euler: ότι θα μπορούσε να οδηγήσει σε κλάσμα της μορφής μηδέν/μηδέν. Διόρθωσε αυτό το σημείο.
- Το 1795 ο Laplace έδωσε μία διαφορετική απόδειξη χρησιμοποιώντας τη διακρίνουσα του πολυωνύμου.

Το πραγματικό πρόβλημα των αποδείξεων

Υποθέτουν ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες (κάποιας μορφής) και στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι είναι μιγαδικοί αριθμοί.



Lagrange (1736-1813)
Εικόνα 15



Laplace (1749-1827)
Εικόνα 16

Gauss

Ο πρώτος που παρατήρησε το βασικό πρόβλημα των προηγούμενων αποδείξεων ήταν ο Gauss (1777-1855) στη διδακτορική του διατριβή το 1799. Εκεί παρουσίασε και την πρώτη του απόδειξη που χρησιμοποιεί τοπολογικές ιδέες. Έχει και αυτή σοβαρές ελλείψεις. Άλλες δύο αποδείξεις, το 1816 (σωστή), 1849 (για τις πολ. εξισώσεις με μιγαδικούς συντελεστές).

Εικόνα 17



Argand

Ο Argand (1768-1822) το 1814 δημοσίευσε μία απόδειξη του ΘΘΑ στην εργασία του *Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse.* Η απόδειξη του Argand βασιζόταν στην ιδέα του d'Alembert.

Το 1820 ο Cauchy αφιερώνει ένα ολόκληρο κεφάλαιο από το *Cours d'analyse* για την απόδειξη του Argand χωρίς να αναφέρει τον Argand.

Τελικά ο Argand αναγνωρίστηκε όταν τον ανέφερε ο Chrystal στο βιβλίο του Algebra το 1886.

Cauchy (1789-1857)



Cauchy (1789-1857)
Εικόνα 18

Μιγαδικό επίπεδο και Argand

Ο Argand (1768-1822) το 1814 δημοσίευσε μία απόδειξη του ΘΘΑ στην εργασία του *Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse.* Η απόδειξη του Argand βασιζόταν στην ιδέα του d' Alembert.

Μιγαδικό επίπεδο και Argand (1813).

Οι μιγαδικοί αριθμοί

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι το απλούστερο σύστημα που περιέχει τους πραγματικούς και μπορεί να κατασκευαστεί από αυτούς με πολύ απλό τρόπο:

$$C = R + Ri \text{ όπου } ii = -1.$$

(δηλαδή το i είναι αλγεβρικό πάνω από το R)

Υπάρχουν άλλα τέτοια συστήματα? (O Gauss φαίνεται να το πίστευε: αποκαλούσε τα άλλα τέτοια συστήματα "σκιά της σκιάς") .

Kneser (1898-1973)

Η πρώτη κατασκευαστική απόδειξη βασισμένη στην απόδειξη (ύπαρξης) του Argand δόθηκε το 1940 από τον Kneser (1898-1973) (μαθητής του Hilbert).



Εικόνα 19

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/8)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Francois Viete**". Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Francois_Viete.jpg#/media/File:Francois_Viete.jpg
- **Εικόνα 2**: "Frans Hals - Portret van **René Descartes**" by After Frans Hals (1582/1583–1666) - André Hatala [e.a.] (1997) De eeuw van Rembrandt, Bruxelles: Crédit communal de Belgique, ISBN 2-908388-32-4.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg#/media/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/8)

- **Εικόνα 3**: "GodfreyKneller-**IsaacNewton**-1689" by Sir Godfrey Kneller - http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg#/media/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg
- **Εικόνα 4**: "**Gottfried Wilhelm von Leibniz**" by Christoph Bernhard Francke - /gbrown/philosophers/leibniz/BritannicaPages/Leibniz /LeibnizGif.html. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg#/media/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/8)

- **Εικόνα 5**: "**Jean d'Alembert"** by Maurice Quentin de La Tour - [1]. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jean_d%27Alembert.jpeg#mediaviewer/File:Jean_d%27Alembert.jpeg
- **Εικόνα 6**: "**Leonhard Euler** 2" by Jakob Emanuel Handmann - 2011-12-22 (upload, according to EXIF data). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg#/media/File:Leonhard_Euler_2.jpg
- **Εικόνα 7**: "**George Peacock**" by en.wikipedia (see there the description page). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Peacock.jpg#/media/File:George_Peacock.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/8)

- **Εικόνα 8**: "**Carl Friedrich Gauss**" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#/media/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg
- **Εικόνα 9**: “**Jodocus Hondius**“ von Colette Hondius-v d Keere. - Swaen.com; first published in the French edition of the Atlas in 1619.. Lizenziert unter Public domain über Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jodocus_Hondius.jpg#mediaviewer/File:Jodocus_Hondius.jpg
- **Εικόνα 10**: "Jonas Suyderhoef after Frans Hals - engraving of René Descartes" by Jonas Suyderhoef - Image : British Museum Portrait of René Descartes; Info : Grimm 1989-90, Illustration nr. 50. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/8)

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jonas_Suyderhoef_after_Frans_Hals_-_engraving_of_Ren%C3%A9_Descartes.jpg#mediaviewer/File:Jonas_Suyderhoef_after_Frans_Hals_-_engraving_of_Ren%C3%A9_Descartes.jpg

- **Εικόνα 11**: "**Wag gottfried wilhelm leibnitz**" by William Anthony Granville, Ph.D., LL.D. - Elements of the Differential and Integral Calculus (revised), The Athenæum Press, Ginn and Company, Boston, U.S.A., 1911..
  Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wag_gottfried_wilhelm_leibnitz.jpg#mediaviewer/File:Wag_gottfried_wilhelm_leibnitz.jpg
- **Εικόνα 12**: "**Isaac Newton, English School, 1715-20**" by attributed to 'English School' - Bonhams. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isaac_Newton,_English_School,_1715-20.jpg#mediaviewer/File:Isaac_Newton,_English_School,_1715-20.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/8)

- **Εικόνα 13**: "**Leonhard Euler**" by Jakob Emanuel Handmann - The portrait is in the Kunstmuseum Basel. This image is a digitized version of that painting. The source (scanner) of the digitized image is unknown.The image was transferred from en.wiki (en:Image:Leonhard Euler.jpg) under the {{PD-old}} license tag. Wars 16:56, 25 June 2006 (UTC). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler.jpg#mediaviewer/File:Leonhard_Euler.jpg
- **Εικόνα 14:** Εικόνα 5
- **Εικόνα 15**: "**Joseph Louis Lagrange**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph_Louis_Lagrange.jpg#mediaviewer/File:Joseph_Louis_Lagrange.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (7/8)

- **Εικόνα 16**: "**Pierre-Simon-Laplace (1749-1827)**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Pierre-Simon-Laplace_(1749-1827).jpg#mediaviewer/File:Pierre-Simon-Laplace_(1749-1827).jpg
- **Εικόνα 17**: "Bendixen - **Carl Friedrich Gauß, 1828**" by Siegfried Detlev Bendixen - published in "Astronomische Nachrichten" 1828.

  Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bendixen__Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen__Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg
- **Εικόνα 18**: "**Augustin-Louis Cauchy 1901**" by Public domain - Library of Congress Prints and Photographs Division. From an illustration in: Das neunzehnte Jahrhundert in Bildnissen / Karl Werckmeister, ed. Berlin :

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (8/8)

Kunstverlag der photographische gesellschaft, 1901, vol. V, no. 581.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg#mediaviewer/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg

- **Εικόνα 19**: "**Hellmuth-Kneser**" by Konrad Jacobs - http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=2180. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0-de via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hellmuth-Kneser.jpg#mediaviewer/File:Hellmuth-Kneser.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 7: Κλασσική Άλγεβρα. Ενότητα 7.1: Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 7: Κλασσική Άλγεβρα.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 7.2: Πέντε βασικά ερωτήματα και η Συμβολική Άλγεβρα.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.
- Πέντε βασικά ερωτήματα και η Συμβολική Άλγεβρα.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει την ιστορική σημασία του Θεμελιώδους Θεωρήματος τις Άλγεβρας και να παρουσιάσει την εισαγωγή της Συμβολικής Άλγεβρας.

5 ερωτήματα για πολυωνυμικές (πραγματικές) εξισώσεις.

1. Έχει κάθε πολυώνυμο ρίζα? ΝΑΙ στο $\mathbb{C}$ σύμφωνα με ΘΘΑ.
2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n?
3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?
4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του?
5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?

2ο ερώτημα

2. Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n?

Ο Descartes έδειξε ότι αν a είναι ρίζα του $p(x)$ τότε

$$p(x) = (x - a)q(x)$$

όπου βαθμός $q(x)$ είναι βαθμός $p(x)$ μείον 1.

Επαναλαμβάνοντας (και θεωρώντας ότι το ΘΘΑ ισχύει) προκύπτει ότι αν ο βαθμός του $p(x)$ είναι $n > 0$ τότε

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

3ο ερώτημα

3. Μπορούμε να καθορίσουμε πότε οι ρίζες είναι ρητές, πραγματικές, θετικές, κλπ?

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία πραγματική ρίζα. Παρόλο αποδεκτό τον 17 και 18 αιώνα αποδείχτηκε τον 19ο αιώνα ως συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής από τον Λογισμό:

(Κάθε συνεχής συνάρτηση που είναι θετική για κάποιες τιμές και αρνητική για κάποιες άλλες πρέπει να διασχίζει τον άξονα των x και να έχει μία ρίζα.)

Descartes

- Descartes: κριτήριο για το ποιοί ρητοί a/b μπορούν να είναι ρίζες ενός πολυωνύμου.
- Descartes: (χωρίς απόδειξη) άνω όριο για τον αριθμό των θετικών ριζών ενός πολυωνύμου.

  Όριο: μετράμε τον αριθμό των αλλαγών των προσήμων των συντελεστών από + σε – και από – σε + (ο αριθμός είναι ίσος με το όριο, ή μειωμένο κατά πολλαπλάσια του δύο).
- Descartes: (χωρίς απόδειξη) άνω όριο για τον αριθμό των αρνητικών ριζών ενός πολυωνύμου.

  Όριο: ο αριθμός των θετικών ριζών του $f(-x)$.

4ο ερώτημα

Ερώτημα 4: Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου και στους συντελεστές του? πως προκύπτουν οι συντελεστές από τις ρίζες?

Σχέση ανάμεσα στις ρίζες ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου και στους συντελεστές του πολυωνύμου: γνωστή.

Αντίστοιχη σχέση για τις ρίζες και τους συντελεστές πολυωνύμων βαθμού έως και 5 από τον Viete.

Ο Newton εισήγαγε την έννοια των **συμμετρικών συναρτήσεων** που εκφράζουν αυτές τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες και τους συντελεστές για πολυώνυμα βαθμού n. (Ρόλος συμμετρικών συναρτήσεων στην επίλυση με ριζικά και Θεωρία Galois).

5ο ερώτημα

5. Πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου?

Το επιθυμητό είναι να δοθεί η λύση με ριζικά όπως για πολυώνυμα βαθμού 2,3,4.

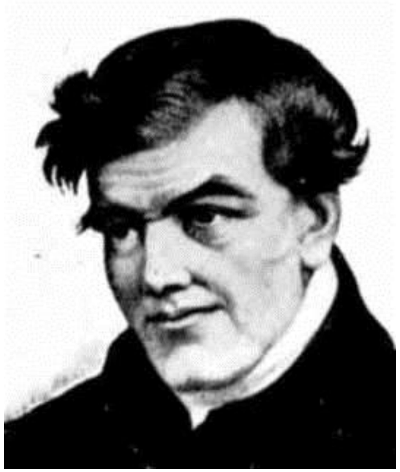
Προσπάθεια: εύρεση τέτοιας λύσης (ακριβής λύση) για πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου του 4.

Παράλληλα: όταν δεν υπάρχει ακριβής λύση γίνεται ανάπτυξη μεθόδων για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων π.χ. Newton (17ος αιώνας), Horner (19ος αιώνας).

Συστήματα αριθμών

- Μελέτη των λύσεων οδηγεί στην μελέτη των ιδιοτήτων διάφορων συστημάτων αριθμών (π.χ. σύστημα των φυσικών αριθμών, των ρητών, των μιγαδικών, κλπ).
- Newton: αρνητικοί αριθμοί «ποσότητες μικρότερες του τίποτα».
- Leibniz: μιγαδικοί αριθμοί «αμφίβια ανάμεσα στα όντα και μη όντα».
- Κανόνες όπως (-1)(-1)=1 γνωστοί από την αρχαιότητα. Όμως χωρίς δικαιολόγηση. Από πότε γίνονται δεκτοί για σύμβολα (δηλ. $(-a)(-a) = a^2$)?

Peacock (1791-1858)



Εικόνα 1

Peacock: «Treatise on Algebra»(1830)
και αργότερα μετά το 1839 την «αριθμητική άλγεβρα» και στην «συμβολική άλγεβρα».
«αριθμητική άλγεβρα»: αφορά τις πράξεις σε σύμβολα που αντιπροσωπεύουν θετικούς αριθμούς και οι κανόνες τους γίνονται αυτόματα αποδεκτές, π.χ.

$a-(b-c)=a-b+c$ όταν $b > c$ και $a > b-c$

«συμβολική άλγεβρα»: πράξεις σε σύμβολα που δεν αντιπροσωπεύουν κάποιες θετικές ποσότητες, π.χ. $a-(b-c)=a-b+c$.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**George Peacock**" by This file is lacking author information.-en.wikipedia (see there the description page). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Peacock.jpg#mediaviewer/File:George_Peacock.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 8: Euler και Gauss.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 8.1: Euler

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Euler
- Gauss

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να περιγράψει τα μαθηματικά επιτεύγματα των Euler και Gauss και να εξηγήσει πως οι δύο αυτοί μεγάλοι μαθηματικοί επηρέασαν την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.

Euler (1707-1783)



Εικόνα 1

Euler 1707-1783

Ελβετία, Ρωσία, Γερμανία, Ρωσία

886 βιβλία και εργασίες

«Introduction in analysin infinitorum» 1748

Ο Euler πήρε τον διαφορικό λογισμό του Leibniz και τη μέθοδο ρυθμών μεταβολής (fluxions) του Newton και τα έκανε μέρος ενός γενικότερου κλάδου των μαθηματικών: της «Ανάλυσης» που ασχολείται με τη μελέτη άπειρων διαδικασιών.

Σύγκριση της σημασίας της «Εισαγωγής στην ανάλυση» του Euler με

1. τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη: (συνδυασμός της γεωμετρικής δουλειάς του Ευδόξου και Θεαίτητου).
2. την «Εισαγωγή» του Viete: (συνδυασμός της αλγεβρικής δουλειάς των al Qwarismi και Cardano).

Συμβολισμοί που εισήγαγε ο Euler

$$f(x)\ (1734)$$
$$e\ (1727)$$
$$\pi\ (1737)$$
$$i\ (1777)$$
$$\Sigma\ (1755)$$

και πολλά άλλα

$$e^{i\pi} + 1 = 0\ (1748)$$
$$e^{ix} = cosx + isinx$$

$\varphi(m)$: αριθμός φυσικών αριθμών μικρότεροι του m που είναι πρώτοι προς το m.

Θεωρία Αριθμών και Euler

Μικρό Θεώρημα του Fermat: p πρώτος, p δεν διαιρεί το a, τότε $a^{p-1} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του p. Αντίστοιχα χωρίς περιορισμούς στο a: $a^p - a$ είναι πολλαπλάσιο του p.

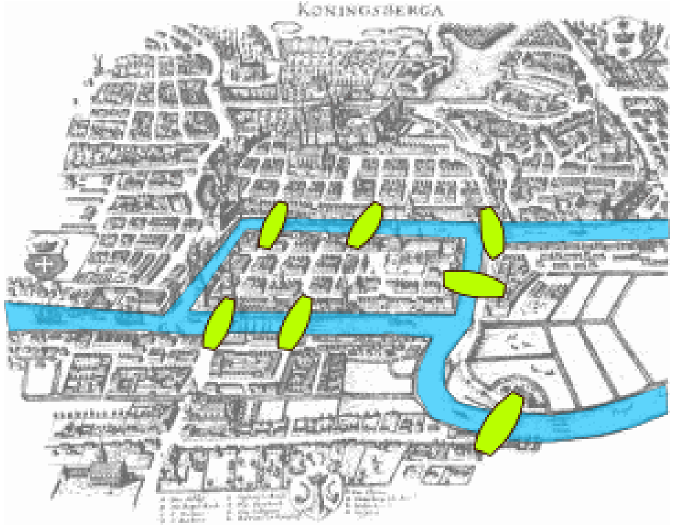
Απόδειξη (**Euler**)

- Όταν $a = 1$, απλό.
- Έστω αληθές όταν $a = k$: $k^p - k = pt, t \in \mathbb{N}$.
- Έστω τώρα $a = k + 1$. Τότε $(k+1)^p - (k+1) = (k^p + pm + 1) - (k+1) = (k^p - k) + pm = p(t+m)$

(Πότε καθιερώθηκε η χρήση της μαθηματικής επαγωγής? ποια είναι η σχέση της με το σύστημα των φυσικών αριθμών?)

Οι 7 γέφυρες του Königsberg (1)

(1735) Η πρώτη εργασία στη θεωρία γραφημάτων/τοπολογία. Πρόβλημα: να σχεδιάσουμε έναν περίπατο που θα περνάει από όλες τις γέφυρες μία και μόνο μία φορά.

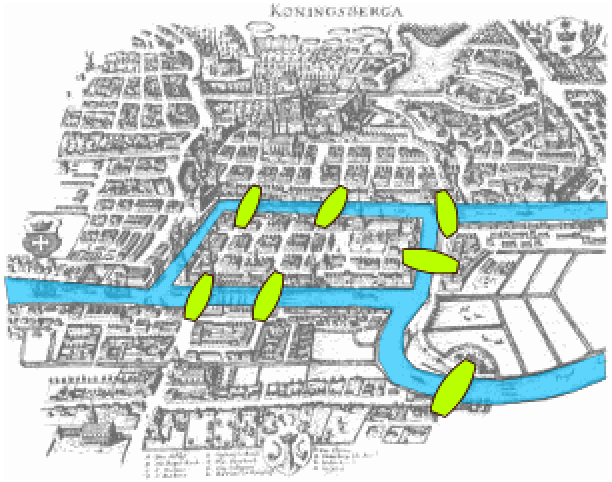


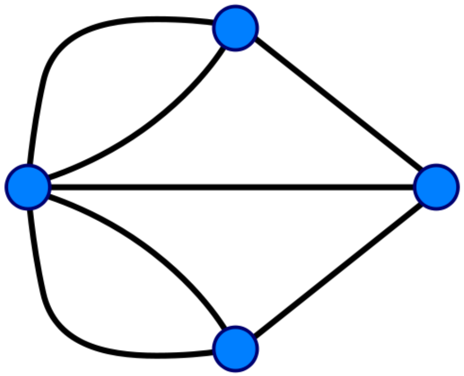
Εικόνα 2

Οι 7 γέφυρες του Königsberg (2)

Οι κορυφές του γραφήματος είναι τα κομμάτια της γης.
Οι ακμές του είναι οι γέφυρες.

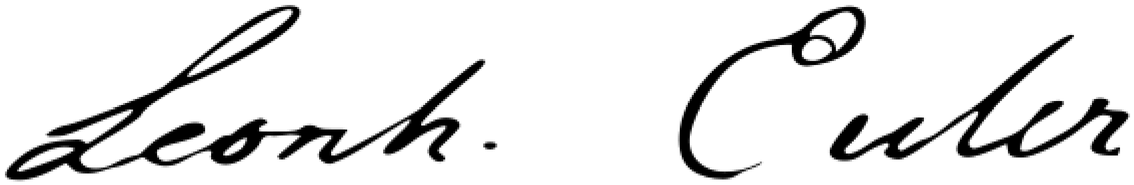
Απάντηση του Euler: δεν μπορεί να σχεδιαστεί τέτοιος περίπατος.
Η τοπολογία?(θέμα παρουσίασης)





Εικόνα 3

Υπογραφή του Euler



Εικόνα 4

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Leonhard Euler** 2" by Jakob Emanuel Handmann - This file is lacking source information.Please edit this file's description and provide a source. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg#mediaviewer/File:Leonhard_Euler_2.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Konigsberg bridges**" by Bogdan Giuşcă - Public domain (PD), based on the image. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png#mediaviewer/File:Konigsberg_bridges.png

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 3**: "**Konigsburg graph**". Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsburg_graph.svg#mediaviewer/File:Konigsburg_graph.svg
- **Εικόνα 4**: "**Euler's signature**" by derivative work: Pbroks13 (talk)Euler's_signature.png: Leonhard Euler - Euler's_signature.png. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler%27s_signature.svg#mediaviewer/File:Euler%27s_signature.svg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 8: Euler και Gauss.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 8.2: Gauss.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Euler.
- Gauss.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να περιγράψει τα μαθηματικά επιτεύγματα των Euler και Gauss και να εξηγήσει πως οι δύο αυτοί μεγάλοι μαθηματικοί επηρέασαν την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



Εικόνα 1

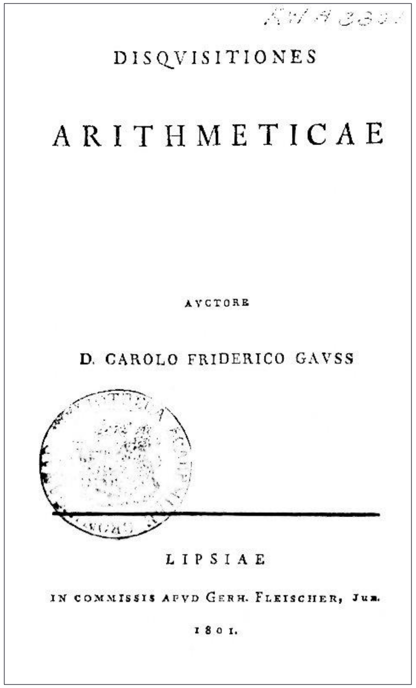
Princeps mathematicorum

Αναφερόταν στα Μαθηματικά ως η «Βασίλισσα των Επιστημών»

Θεωρία Αριθμών, Στατιστική, Ανάλυση, Διαφορική Γεωμετρία, Αστρονομία, Ηλεκτροστατική, Οπτική, Γεωδαισία, κ.α.

Δίδαξε στο πανεπιστήμιο του Göttingen.

Θεωρία Αριθμών (1798)



Εικόνα 2

Ο Gauss συγκέντρωσε έργο μαθηματικών όπως Fermat, Euler, Lagrange, Legendre και δικά του πρωτότυπα αποτελέσματα με συστηματικό τρόπο, συμπληρώνοντας κενά και διορθώνοντας αποδείξεις. Επέκτεινε τη θεωρία αριθμών στην αλγεβρική θεωρία αριθμών.

Κλάσεις ισοδυναμίας

Όρισε τις κλάσεις ισοδυναμίας.
Απέδειξε τον νόμο της τετραγωνικής αντιστροφής (theorema aureum) όταν p, q είναι περιττοί πρώτοι:

$$x^2 \equiv p(modq) \Leftrightarrow x^2 \equiv q(modp)$$

εκτός αν

$$p \equiv q \equiv 3(mod4)$$

$$x^2 \equiv p(modq) \Leftrightarrow x^2 \not\equiv q(modp)$$

Ο Gauss έδωσε 8 διαφορετικές αποδείξεις για αυτό το θεώρημα.

Κανονικά πολύγωνα, κατασκευές με κανόνα και διαβήτη

Ποια κανονικά n-γωνα είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη?

Απάντηση n πρέπει να είναι γινόμενο δύναμης του 2 και πρώτων του Fermat,
(ικανή (Gauss 1801) και αναγκαία συνθήκη (Wantzel 1837)).

Οι πρώτοι του Fermat

Πρώτοι του Fermat είναι πρώτοι της μορφής

$$2^{2^n} + 1$$

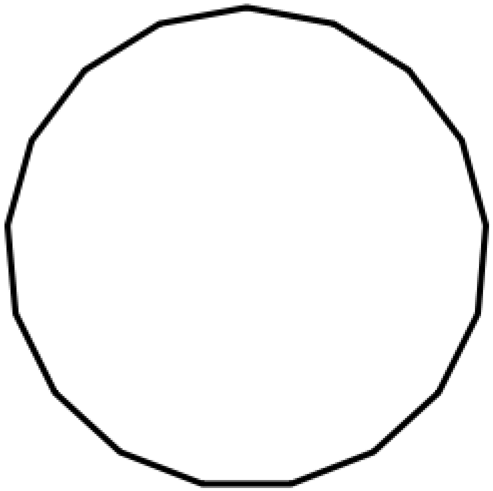
π.χ. 3, 5, 17, 257, 65537, (υπάρχουν άλλοι?)

(γνωστό από αρχαιότητα ότι το τρίγωνο και το πεντάγωνο είναι κατασκευάσιμα, βλ. Ευκλείδη)

Ο Gauss έδειξε (θεωρητικά) ότι το κανονικό 17-γωνο είναι κατασκευάσιμο **(1796)** και το γενίκευσε to 1801 αφού πρώτα όρισε ως περιόδους ειδικά αθροίσματα ριζών της μονάδας, π.χ. $\zeta + \zeta^{16}$ που είναι $2\cos(\frac{2\pi}{17})$ όπου

$$\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{17})$$

17-γωνο *κατασκευάσιμο Gauss 1796*



$$16\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$+2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

17-γωνο *κατασκευάσιμο Gauss 1796*

Ο Gauss έδειξε ότι οι ρίζες

$$x^n - 1$$

δίνονται με ριζικά.

Συνδεση με Θεωρία Galois.

Πόσο είναι το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως το 100?

Σε δευτερόλεπτα η απάντηση από τον μικρό Gauss:

5050

1	2	3	4	…	50
100	99	98	97		51
-----	-----	-----	-----	-----	-----
101	101	101	101		101

50 x 101 =5050

Γενίκευση

Γενίκευση: το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως το n όταν n άρτιος?

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n/2 \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & n/2+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} n+1 & n+1 & n+1 & n+1 \end{array}$$

άρα το άθροισμα είναι $n/2\,(n+1)$.

Οι ακέραιοι του Gauss

ΘΘΑ (4 αποδείξεις 1799 πρώτη, 1849 η τελευταία)

Οι ακέραιοι του Gauss: $a + bi$ όπου a, b ακέραιοι.

Προσοχή $5 = (1+2i)(1-2i)$ δεν είναι πρώτος σε αυτό το σύνολο!

Η ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίησης ήταν γνωστή από την αρχαιότητα, βλ. «Στοιχεία» (Ευκλείδης).

Ο Gauss μελέτησε την ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίσης σε συστήματα αριθμών μεγαλύτερα από τους ακεραίους--- γιατί κατάλαβε ότι πιθανόν να υπάρχουν συστήματα αριθμών που να μην την ικανοποιούν!

Εικασία του Gauss: το θεώρημα των πρώτων αριθμών

$\pi(x)$ είναι ο αριθμός των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του x

τότε η συνάρτηση $\pi(x)$ πλησιάζει ασυμπτωτικά τη συνάρτηση $\frac{x}{logx}$.

Απόδειξη: 1896 Hadamard, Poussin (ανεξάρτητα).

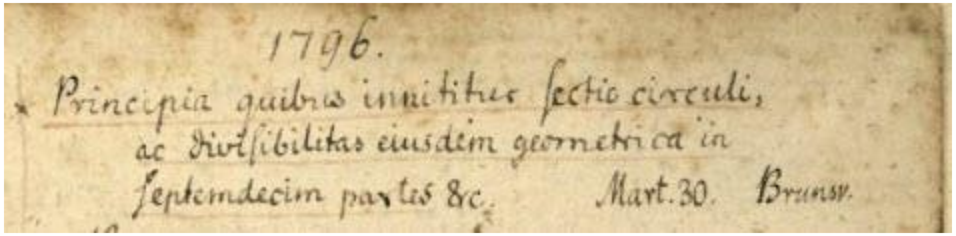
Gauss και μη Ευκλείδια γεωμετρία

Gauss και μη Ευκλείδια γεωμετρία (σύνδεση του 5ο αξιώματος του Ευκλείδη και της έρευνας του Gauss, γεωμετρίες των Bolyai 1823, Lobachevsky 1829, Riemann) 1828



Εικόνα 3

Το ημερολόγιο του Gauss



1796.
Principia quibus innititur sectio circuli,
ac divisibilitas eiusdem geometrica in
septemdecim partes &c. Mart. 30. Brunsv.

Εικόνα 4

1796-1814
19 σελίδες,
146 εγγραφές (περισσότερες από αυτές σημαντικές μαθηματικές ανακαλύψεις)

Δημοσιοποιήθηκε το 1898.

Υπογραφή του Gauss

C. F. Gauss



Εικόνα 5

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/3)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Carl Friedrich Gauss**" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/ wiki/File:Carl _Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:CarlFriedrich_Gauss.jpg
- **Εικόνα 2**: "Disqvisitiones-800". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Disqvisitiones-800.jpg#mediaviewer/File:Disqvisitiones-800.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/3)

- **Εικόνα 3**: "Bendixen - **Carl Friedrich Gauß**, 1828" by Siegfried Detlev Bendixen - published in "Astronomische Nachrichten" 1828. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org /wiki/File:Bendixen__Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen__Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg
- **Εικόνα 4**: http://pballew.blogspot.gr/2014/03/on-this-day-in-math-march-30.html

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/3)

- **Εικόνα 5**: "**Gauss' signature**" by Carl Friedrich Gauss - http://www.mathematik.ch/mathematiker/Gauss.jpg. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gauss%27_signature.png#mediaviewer/File:Gauss%27_signature.png

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.1: Εισαγωγή

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- Galois και Θεωρία Ομάδων.
- Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- Emily Noether.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην Ε. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

Πίσω στην Άλγεβρα...

Έως το τέλος του 18ου αιώνα, άλγεβρα ήταν η μελέτη πολυωνυμικών εξισώσεων (κλασσική άλγεβρα).

Το 20ο αιώνα η άλγεβρα έγινε η μελέτη αφηρημένων συστημάτων, συστημάτων που καθορίζονται από αξιώματα (μοντέρνα άλγεβρα).

Η μετάβαση έγινε τον 19ο αιώνα. Τότε εμφανίστηκαν και αναγνωρίσθηκαν οι δομές για ομάδες, για αντιμεταθετικούς και μη δακτυλίους, για σώματα και για διανυσματικούς χώρους.

Οι τομείς της αφηρημένης Άλγεβρας

Οι τομείς αυτοί της αφηρημένης Άλγεβρας αναπτύχθηκαν παράλληλα και αλληλοεπηρρεάζοντας ο ένας τον άλλον.

Για παράδειγμα

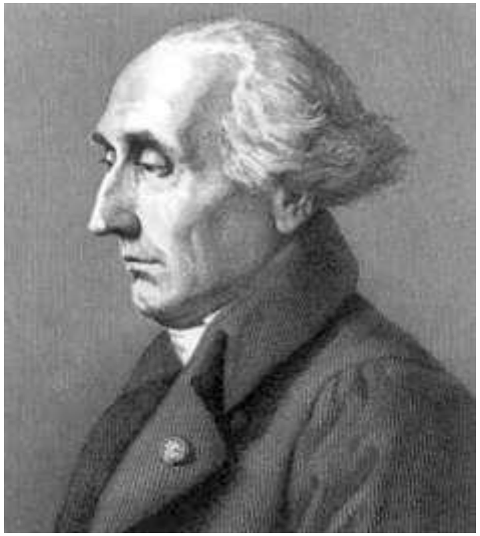
- η θεωρία Galois αφορά ομάδες και σώματα.
- η αλγεβρική θεωρία αριθμών εμπλέκει ομάδες, αντιμεταθετικούς δακτυλίους, σώματα.
- η θεωρία αναπαραστάσεων συνδυάζει ομάδες, μη αντιμεταθετικούς δακτυλίους, γραμμική άλγεβρα.

Θεωρία ομάδων (1)

Η θεωρία ομάδων οφείλει την εξέλιξή της στις επόμενες πηγές:

- Κλασσική άλγεβρα (Lagrange 1770) *.
- Θεωρία αριθμών (Gauss, 1801)*.
- Γεωμετρία (Klein, 1874, πρόγραμμα του Erlangen).
- Ανάλυση (Lie 1874, Poincare και Klein, 1876).

Θεωρία ομάδων (2)



Joseph-Louis Lagrange
1736-1813
Εικόνα 1



Felix Klein
1777-1855
Εικόνα 2



Carl Friedrich Gauss
1777-1855
Εικόνα 3

Θεωρία ομάδων (3)



Henri Poincare 1854-1912

Εικόνα 4



Marius Sophus Lie 1842-1899

Εικόνα 5

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "Lagrange portrait". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lagrange_portrait.jpg#mediaviewer/File:Lagrange_portrait.jpg
- **Εικόνα 2**: "Felix Klein". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Felix_Klein.jpeg#mediaviewer/File:Felix_Klein.jpeg
- **Εικόνα 3**: "Carl Friedrich Gauss" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo)- Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 4**: "Henri Poincare". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Henri_Poincare.jpg#mediaviewer/File:Henri_Poincare.jpg
- **Εικόνα 5**: "Sophus Lie" by Ludwik Szacinski - This file is lacking source information. Please edit this file's description and provide a source.Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sophus_Lie.jpg#mediaviewer/File:Sophus_Lie.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα. Ενότητα 9.1: Εισαγωγή». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.2: Επιλύουσες και μεταθέσεις

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- Galois και Θεωρία Ομάδων.
- Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- Emily Noether.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

Κλασσική Άλγεβρα και Lagrange

Εύρεση μεθόδων για την εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων:

Περιπτώσεις ανάλογα με το βαθμό του πολυωνύμου.

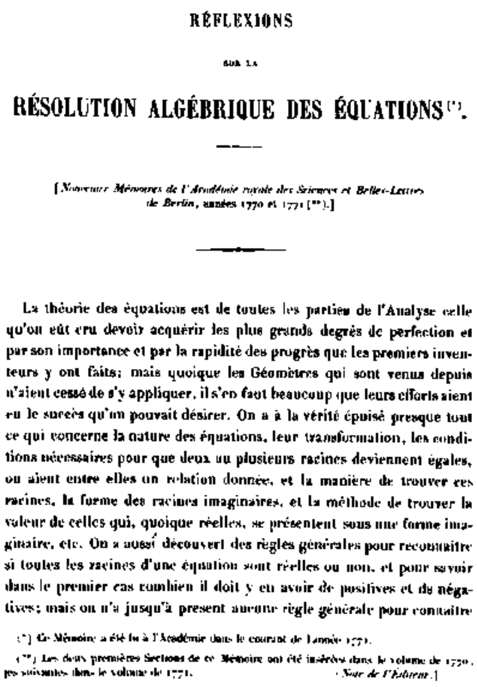
Βαθμός **2:** μέθοδοι ήταν γνωστές από την εποχή των Βαβυλωνίων (1600 π.Χ.).

Βαθμός **3** και **4:** μέθοδοι δόθηκαν στα μισά του 16^{ου} αιώνα.

Βαθμός **5:** το επόμενο κύριο πρόβλημα για τους επόμενους δύο αιώνες.

Αυτό ήταν και το θέμα της εργασίας του Lagrange (1770) «Reflexions sur la resolution algebriques des equations»

Joseph-Louis Lagrange



RÉFLEXIONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS (*).

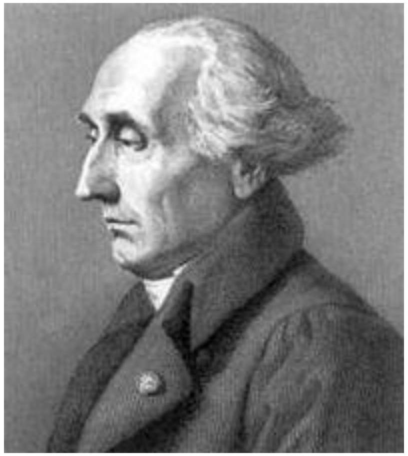
[*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, années 1770 et 1771 (**).]

La théorie des équations est de toutes les parties de l'Analyse celle qu'on eût cru devoir acquérir les plus grands degrés de perfection et par son importance et par la rapidité des progrès que les premiers inventeurs y ont faits; mais quoique les Géomètres qui sont venus depuis n'aient cessé de s'y appliquer, il s'en faut beaucoup que leurs efforts aient eu le succès qu'on pouvait désirer. On a à la vérité épuisé presque tout ce qui concerne la nature des équations, leur transformation, les conditions nécessaires pour que deux ou plusieurs racines deviennent égales, ou aient entre elles une relation donnée, et la manière de trouver ces racines, la forme des racines imaginaires, et la méthode de trouver la valeur de celles qui, quoique réelles, se présentent sous une forme imaginaire, etc. On a aussi découvert des règles générales pour reconnaître si toutes les racines d'une équation sont réelles ou non, et pour savoir dans le premier cas combien il doit y en avoir de positives et de négatives; mais on n'a jusqu'à présent aucune règle générale pour connaître

(*) Ce Mémoire a été lu à l'Académie dans le courant de l'année 1771.

(**) Les deux premières Sections de ce Mémoire ont été insérées dans le volume de 1770, les suivantes dans le volume de 1771. (*Note de l'Éditeur.*)

Εικόνα 1



Joseph-Louis Lagrange

1736-1813

Εικόνα 2

Lagrange και αλγεβρική επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων

Ο Lagrange ανέλυσε τις διάφορες μεθόδους για την αλγεβρική επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού 3 και 4 που είχαν δοθεί (πέρα από τους Ιταλούς) από τους Viete, Descartes, Euler, Bezout.

Αντιλήφθηκε ότι το κοινό στοιχείο αυτών των μεθόδων είναι η αναγωγή του προβλήματος σε ένα πρόβλημα εύρεσης ριζών μίας βοηθητικής πολυωνυμικής εξίσωσης:

- όταν η αρχική εξίσωση έχει βαθμό 3 η βοηθητική επιλύουσα εξίσωση έχει βαθμό 2.
- όταν η αρχική εξίσωση έχει βαθμό 4 η βοηθητική επιλύουσα εξίσωση έχει βαθμό 3.

Τύπος του Cardano

$$x^3 + cx = d$$

Αν u, v τέτοια ώστε

$$u - v = d, uv = \left(\frac{c}{3}\right)^3$$

τότε

$$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

είναι ρίζα της εξισωσης.

Η βοηθητική επιλύουσα είναι

$$u^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3 = du$$

Επιλύουσα εξίσωση (1)

Έστω ότι η $f(x)$ έχει ρίζες $a_1, \dots, a_n$ τις οποίες προσπαθούμε να βρούμε αλγεβρικά.

Βρίσκουμε την κατάλληλη συνάρτηση $R(x_1, \dots, x_n)$ και υπολογίζουμε τις διάφορες τιμές της, όταν στην θέση των x_i θέσουμε τα a_i με κάθε δυνατό τρόπο. (Εμφάνιση της ιδέας της μετάθεσης ριζών).

Έστω $y_1, \dots, y_k$ οι διαφορετικές τιμές της $R(x_1, \dots, x_n)$. Τότε η επιλύουσα εξίσωση είναι

$$g(x) = (x - y_1) \dots (x - y_k)$$

Ο βαθμός της $g(x)$ είναι ίσος με k. Το ζητούμενο είναι να είναι το k μικρότερο από τον βαθμό της $f(x)$.

Επιλύουσα εξίσωση (2)

Οι συντελεστές του $g(x)$ εξαρτώνται από τα y_i, τα οποία με τη σειρά τους εξαρτώνται από τις ρίζες a_i και τελικά από τους συντελεστές του $f(x)$. Το να βρεθεί η επιλύουσα εξίσωση είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία.

Έστω $\deg f(x) = 4$ και $a_1, \dots, a_4$ οι ρίζες του $f(x)$. Διαλέγουμε

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$$

Υπάρχουν 4!=24 μεταθέσεις των 4 ριζών, δηλαδή πρέπει να υπολογίσουμε την συνάρτηση $R(x_1, x_2, x_3, x_4)$

για τις ρίζες 24 φορές. Για παράδειγμα

Επιλύουσα εξίσωση (3)

- $R(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 a_2 + a_3 a_4$
- $R(a_2, a_3, a_4, a_1) = a_2 a_3 + a_1 a_4$
- $R(a_3, a_4, a_1, a_2) = a_3 a_4 + a_1 a_2$
- $R(a_4, a_1, a_2, a_3) = a_1 a_4 + a_2 a_3$
- $R(a_1, a_3, a_2, a_4) = a_1 a_3 + a_2 a_4$
- κ.ο.κ.ε.

και μπορούμε να ελέγξουμε ότι τελικά υπάρχουν μόνο 3 διαφορετικές τιμές.

Έτσι ο βαθμός της επιλύουσας είναι 3.

$$(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3)$$

Θεώρημα του Lagrange

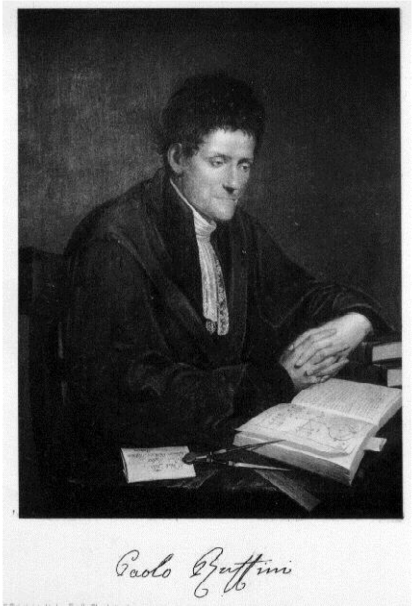
Ο Lagrange απέδειξε ότι ο βαθμός k της επιλύουσας ενός πολυωνύμου βαθμού n διαιρεί το $n!$. (αντιστοιχεί στο Θεώρημα του Lagrange.)

Επίσης απέδειξε ότι αναγκαία συνθήκη για την επίλυση της εξίσωσης βαθμού n είναι η ύπαρξη κάποιας επιλύσουσας βαθμού $<n$.

Όταν επιχείρησε για την εξίσωση βαθμού 5 βρήκε μόνο επιλύουσες βαθμού 6.

Η συνέχεια με Ruffini, Abel και Galois…

Ruffini (1799) και Abel (1824)



Paolo Ruffini 1765-1822

Εικόνα 3



Niels Abel 1802-1829

Εικόνα 4

Ruffini και Abel

Ο Ruffini (1799) και ο Abel (1824) έδειξαν ότι δεν υπάρχουν επιλύουσες εξισώσεις βαθμού μικρότερου του n όταν ο βαθμός της αρχικής εξίσωσης n είναι >4. Το έργο τους συνέβαλε στην ανάπτυξη της θεωρίας των μετασχηματισμών.

Η απόδειξη του Ruffini είχε λάθη.

Cauchy 1789 -1857



Εικόνα 5

Ο Cauchy μελέτησε το έργο του Ruffini και συνέβαλε ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της θεωρίας των μεταθέσεων.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: http://www.history.mcs.stand.ac.uk/Bookpages/Lagrange9.gif
- **Εικόνα 2**: "Lagrange portrait". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lagrange_portrait.jpg#mediaviewer/File:Lagrange_portrait.jpg
- **Εικόνα 3**: "Ruffini paolo" by This file is lacking author information. - http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates67/opciones/sabias/Ruffinni/Ruffinni.htm. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ruffini_paolo.jpg#mediaviewer/File:Ruffini_paolo.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 4**: "Niels Henrik Abel2" by Johan Gørbitz - English Wikipedia (en:Image:Niels Henrik Abel2.jpg. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Niels_Henrik_Abel2.jpg#mediaviewer/File:Niels_Henrik_Abel2.jpg
- **Εικόνα 5**: "Augustine Cauchy" by Unknown - Taken from a book.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustine_Cauchy.jpg#mediaviewer/File:Augustine_Cauchy.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.3: Galois και Θεωρία Ομάδων.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- Galois και Θεωρία Ομάδων.
- Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- Emily Noether.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

Galois (1)

Για τον Galois το κύριο ζήτημα ήταν να καταλάβει τις γενικές αρχές. Θεωρούσε ότι οι υπολογιστικές μέθοδοι είχαν γίνει τόσο περίπλοκες που πρόοδος με αυτόν τον τρόπο ήταν αδύνατη.

Για τον Galois υπήρξαν δύο ζητήματα:

1. αντιστοιχία ομάδων και σωμάτων
   (θεωρία Galois)

και

2. εφαρμογές για την επίλυση των εξισώσεων,
   --- πότε οι ρίζες ενός πολυωνύμου εκφράζονται αλγεβρικά.

Galois (2)

Ο Galois πρώτος χρησιμοποίησε τον όρο <u>ομάδα:</u>

Μία συλλογή από μεταθέσεις που το γινόμενο τους ανήκει σε αυτή τη συλλογή.

Έδειξε ότι οι ιδιότητες μίας αλγεβρικής εξίσωσης συνδέονται άμεσα με της ιδιότητες μία ομάδας μεταθέσεων. Η ομάδα αυτή αποτελείται από εκείνες τις μεταθέσεις ριζών που δεν αλλάζουν τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες.

Για να περιγράψει αυτές τις ιδιότητες ανακάλυψε την έννοια των κανονικών υποομάδων και των ομάδων πηλίκα.

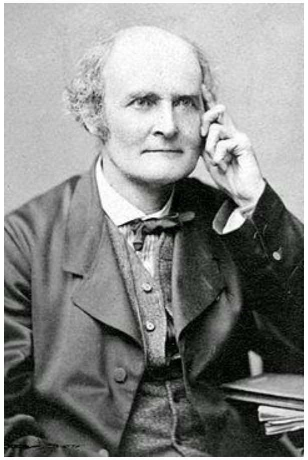
Galois (3)

Παρατήρησε ότι η ύπαρξη επιλύουσας είναι ισοδύναμης με την ύπαρξη κανονικών υποομάδων με κατάλληλους δείκτες.

Το έργο του γράφτηκε το 1830 και εμφανίστηκε το 1846 (Louiville).

(Ο Cayley το 1854 έδωσε τον πρώτο αφηρημένο ορισμό ομάδας)

Εικόνα 1



Evariste Galois



Evariste Galois
25 Oct 1811- 31 May 1832
Εικόνα 2



Bourg-la-Reine
Εικόνα 3

Οι γονείς του

Οι γονείς του:

Μορφωμένοι και σκεπτόμενοι: (φιλοσοφία, φιλολογία, θρησκευτικά).

Ο πατέρας του: Δημοκρατικός και Δήμαρχος του Bourg-la-Reine 1814.

Η μητέρα του: κόρη δικαστή, πρώτη του δασκάλα (έως τα 12) ελληνικά, λατινικά, θρησκευτικά.

Καλός μαθητής έως το 1825. Επανάληψη τάξης το 1826 (έμεινε στα ρητορικά).

Legendre-Galois

1826: βιβλίο του Legendre «Στοιχεία της Γεωμετρίας»

«Είναι το πάθος των μαθηματικών που τον έχει καταλάβει. Πιστεύω ότι θα ήταν καλύτερα για αυτόν αν οι γονείς του του επέτρεπαν να μελετήσει μόνο τα μαθηματικά. Χάνει τον χρόνο του εδώ και δεν κάνει τίποτα άλλο από το να παιδεύει τους δασκάλους του και να τιμωρείται.»

«παράξενος, κλειστός...»

«πρωτότυπος, όχι μεθοδικός»

Νεανικά διαβάσματα-Επιρροές



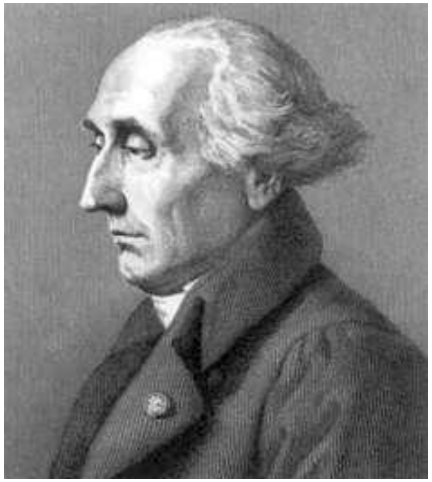
Legendre 1752 – 1833

Εικόνα 4



Abel 1802 – 1829

Εικόνα 5



Lagrange 1736 – 1813

Εικόνα 6

École Polytechnique

- 1828
- 1829 (τραγικός θάνατος πατέρα του)



Εικόνα 7

École Polytechnique
Διπλή αποτυχία....
το καλύτερο ανώτατο ίδρυμα της εποχής,
Μεγάλο πολιτικό φοιτητικό κίνημα
Πανεπιστήμιο



Εικόνα 8

Cauchy - Fourier

Cauchy
1789 - 1857



απόρριψη
Εικόνα 9

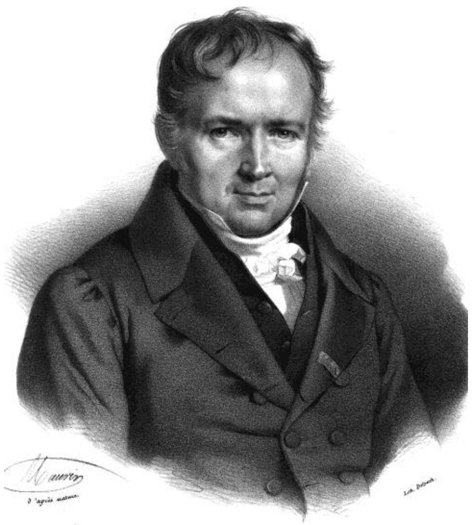
Fourier
1768 - 1830



-- υποβολή της εργασίας το 1830...
το χειρόγραφο δε βρέθηκε ποτέ
Εικόνα 10

Poisson

- 1830: Το μεγάλο βραβείο της Ακαδημίας αποδίδεται στον Abel και στον Jacobi.
- Η εργασία του Galois δεν βρέθηκε ποτέ.
- 1831, η δουλειά του Galois απορρίφθηκε ακόμα μία φορά από τον Poisson…



Poisson 1781 – 1840

Εικόνα 11

Φυλακή

Αποβολή από την ENS: Δεκέμβρης1830, λόγος: πολιτικό γράμμα, υπογεγραμμένο, κατά του διευθυντή της Σχολής στο Gazette des Ecoles.

Φυλακή

- Μάιος 1831, λόγος: απειλή κατά του βασιλιά, χρόνος φυλάκισης: 1 μήνας.
- Ιούλιος 1831 (ημέρα της Bastille) λόγος: στολή των Δημοκρατικών φρουρών (και με πιστόλια, τουφέκι, σπαθί..) χρόνος φυλάκισης: 6 μήνες.

Φυλακή της Αγίας Πελαγίας

- Στη φυλακή της Αγίας Πελαγίας ο Galois

έλαβε την απόριψη από τον Poisson:

«το επιχείρημα του συγγραφέα δεν είναι σαφές ούτε αρκετά ανεπτυγμένο για να αποφασίσουμε ως προς την ισχύ του....

Προτείνουμε ο συγγραφέας να δημοσιεύσει το έργο του στο σύνολό του για να μπορέσουμε να διαμορφώσουμε οριστική άποψη.»

Απόπειρα αυτοκτονίας....

Ανάρρωση από χολέρα

- Απρίλιο 1832, ανάρρωση από χολέρα.



Εικόνα 12

Θάνατος

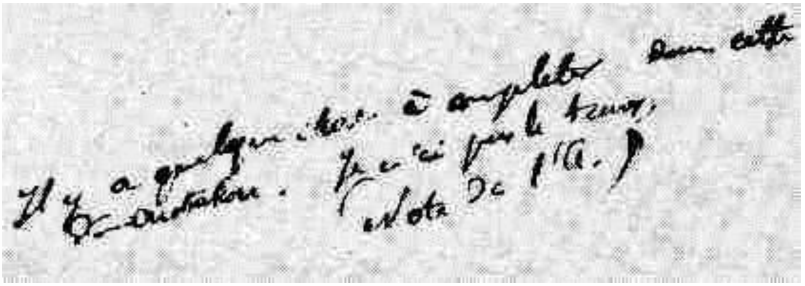
- 30 Μαίου 1832: μονομαχία, ένα μήνα μετά την αποφυλάκιση...
- 29 Μαίου 1832: ολονυκτία για το περίφημο γράμμα στον φίλο Chevalier.

Τελευταία λόγια στον αδελφό του Alfred:

Ne pleure pas, Alfred ! J'ai besoin de tout

mon courage pour mourir à vingt ans !

Σημείωση στο γράμμα προς τον Chevalier:



«υπάρχει κάτι να προστεθεί για να ολοκληρωθεί αυτή η απόδειξη. Δεν προλαβαίνω.»
Εικόνα 13

Σημείωση στο γράμμα προς τον Chevalier:

«Ρώτα τον Jacobi ή τον Gauss για την γνώμη τους, όχι ως προς την ισχύ των όσων γράφω, αλλά ως προς την σημασία αυτών των θεωρημάτων.

Αργότερα ελπίζω ότι θα υπάρξουν κάποιοι που θα θεωρήσουν καλό να αποσαφηνίσουν όλα αυτά.... »

Αναγνώριση

- 1843: Liouville.
- *1846: Δημοσίευση Journal des mathématiques pures et appliquées.*



Liouville 1809 – 1882
Εικόνα 14

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/4)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arthur_Cayley.jpg #mediaviewer/File:Arthur_Cayley.jpg
- **Εικόνα 2**: "Galois". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galois.jpg#mediaviewer/File:Galois.jpg
- **Εικόνα 3**: "Bourg-la-Reine map". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bourg-la-Reine_map.svg#mediaviewer/File:Bourg-la-Reine_map.svg
- **Εικόνα 4**: "**Louis Legendre**" by François Séraphin Delpech - not given. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Louis_Legendre.jpg#mediaviewer/File:Louis_Legendre.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/4)

- **Εικόνα 5**: "**Niels Henrik Abel**" by Johan Gørbitz - Originally uploaded to English wikipedia byen:User:Pladask,http://www.math.uio.no/div/abelkonkurransen/. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Niels_Henrik_Abel.jpg#mediaviewer/File:Niels_Henrik_Abel.jpg
- **Εικόνα 6**: "**Lagrange portrait**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lagrange_portrait.jpg#mediaviewer/File:Lagrange_portrait.jpg
- **Εικόνα 7**: "**Galois**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galois.jpg#mediaviewer//File:Galois.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/4)

- **Εικόνα 8**: "**Ecole Polytechnique** France seen from lake DSC03389". Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ecole_Polytechnique_France_seen_from_lake_DSC03389.JPG#mediaviewer/File:Ecole_Polytechnique_France_seen_from_lake_DSC03389.JPG
- **Εικόνα 9**: "**Augustine Cauchy**" by Unknown - Taken from a book.

  Licensed under Public domain via Wikimedia Commonshttp://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustine_Cauchy.jpg#mediaviewer/File:Augustine_Cauchy.jpg
- **Εικόνα 10**: "**Fourier2**" by Original uploader was User:Bunzil at en.wikipedia - Originally from en.wikipedia; description page is/was here.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fourier2.jpg#mediaviewer/File:Fourier2.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/4)

- **Εικόνα 11**: "**Simeon Poisson**" by François Séraphin Delpech - http://web4.si.edu/sil/scientific-identity/display_results.cfm?alpha_sort=W. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simeon_Poisson.jpg#mediaviewer/File:Simeon_Poisson.jpg
- **Εικόνα 12**: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/galois/images/1111.jpg
- **Εικόνα 13**: http://www.casentino.toscana.it/galileo/galileo_4/articoli/evaris2.gif
- **Εικόνα 14**: "**Joseph liouville**" by This file is lacking author information. - http://www.math.sunysb.edu/. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph_liouville.jpeg#mediaviewer/File:Joseph_liouville.jpeg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα. Ενότητα 9.3: Galois και Θεωρία Ομάδων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.4: Οι ομάδες στο έργο του Gauss.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- Galois και Θεωρία Ομάδων.
- Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- Emily Noether.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

Πίσω στο ξεκίνημα της Θεωρίας Ομάδων



Εικόνα 1

Gauss

1777-1855

Θεωρία Αριθμών και Gauss

Στο έργο του «Disquisitions…» (1801) βρίσκονται οι απαρχές της θεωρίας των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων.

Οι ομάδες εμφανίζονται σε 4 μορφές:

1. ακέραιοι modulo m,
2. ακέραιοι που είναι πρώτοι προς το m, modulo m,
3. κλάσεις ισοδυναμίας διγραμμικών συναρτήσεων βαθμού 2,
4. το σύνολο των n-στών ριζών της μονάδας.

Gauss και ιδιότητες των ομάδων

Ο Gauss απέδειξε σημαντικές ιδιότητες των ομάδων (χωρίς όμως να χρησιμοποιήσει την ορολογία της θεωρίας ομάδων).

Παραδείγματος χάριν έδειξε ότι οι μη μηδενικοί ακέραιοι $modulo\ p$ είναι δυνάμεις ενός στοιχείου, δηλαδή ότι

$$Z_p^* = \langle a \rangle$$

Και ότι ο αριθμός των στοιχείων $modulo\ p$ που μπορούν να παράγουν όλα τα υπόλοιπα είναι ίσος με $\varphi(p-1)$.

Gauss και διγραμμική μορφή

Μια διγραμμική μορφή βαθμού 2 είναι μία έκφραση $f(x,y)$ έτσι ώστε

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Το κύριο ερώτημα εκείνης της εποχής ήταν να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι m που να είναι δυνατόν να γραφούν με τον εξής τρόπο

$$f(x,y) = m$$

για κατάλληλα x, y. Ο Gauss απέδειξε ότι μπορεί να οριστεί σύνθεση τέτοιων μορφών και ότι αυτή η σύνθεση αντιστοιχεί σε «πράξη στοιχείων μίας αντιμεταθετικής ομάδας».

Gauss και αφηρημένη ομάδα

Ο Gauss δεν φαίνεται να είχε την έννοια της αφηρημένης ομάδας.

Παρόλο που οι τεχνικές του ήταν γενικές, αντιμετώπισε την κάθε περίπτωση ομάδας (από τις 4 που εμφανίζονται στη δουλειά του) χωριστά.

Δεν είχε μία μέθοδο που να εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "Carl Friedrich Gauss" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα. Ενότητα 9.4: Οι ομάδες στο έργο του Gauss». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.5: Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι: οι τετράδες του Hamilton.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- Galois και Θεωρία Ομάδων.
- Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- Emily Noether.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

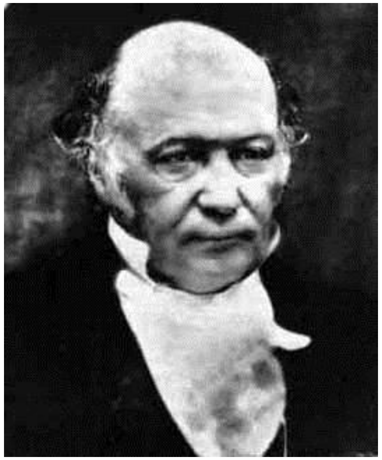
Η μετάλλαξη της Άλγεβρας η μεγάλη στροφή



Οι ακέραιοι του Gauss (1829)
Εικόνα 1



Ομάδες (1832)
Εικόνα 2



Τετραδικοί αριθμοί (1843)
Εικόνα 3

Θεωρία Δακτυλίων

Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Ξεκίνημα: αλγεβρική θεωρία αριθμών, αλγεβρική γεωμετρία, θεωρία αναλλοιώτων.

Μη Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Ξεκίνημα: τετραδικοί αριθμοί του Hamilton (1843).

Τετραδικοί αριθμοί (1)

Οι τετραδικοί αριθμοί είναι στοιχεία της μορφής

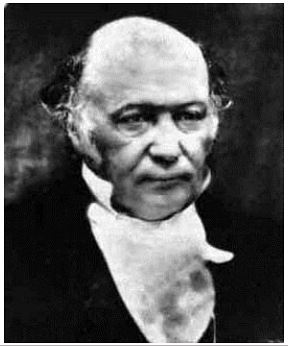
$$a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Η πρόσθεση τους γίνεται ανα συνταταγμένη:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός τους ικανοποιεί τις σχέσεις:

Εικόνα 4



Τετραδικοί αριθμοί (2)

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

όπου

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

Το σύστημα αυτό ικανοποιεί όλους τους κανόνες που έχουν οι πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί εκτός από την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού.

Τετραδικοί αριθμοί (3)

Ένας άλλος τρόπος για να γράψει κανείς τους τετραδικούς αριθμούς είναι σαν τετράδες:

$$(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

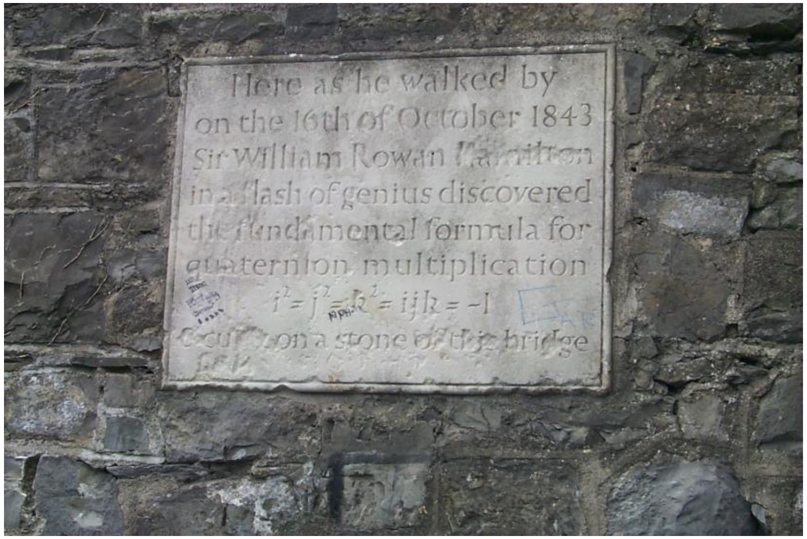
Έτσι ώστε η πρόσθεση να γίνεται ανά συντεταγμένη ενώ ο πολλαπλασιασμός προκύπτει ως

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2, a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - d_1 c_2, \dots, \dots)$$

Τετραδικοί αριθμοί (4)

Πρέπει να σημειωθεί ότι όταν οι τελευταίες δύο συντεταγμένες είναι μηδέν, τότε έχουμε τους μιγαδικούς αριθμούς.

Η αρχική προσπάθεια του Hamilton ήταν να επεκτείνει το σώμα των μιγαδικών σε τριάδες αλλά κατάλαβε ότι αυτό δεν ήταν δυνατό να γίνει.



Εικόνα 5

Τετραδικοί αριθμοί (5)

Ακολούθησαν πολλά καινούργια παραδείγματα όπου ο πολλαπλασιασμός δεν ικανοποιούσε την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό των τετραγωνικών πινάκων (Cayley 1855, 1858).

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Carl Friedrich Gauss**" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Galois**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galois.jpg#mediaviewer/File:Galois.jpg
- **Εικόνα 3**: "**WilliamRowanHamilton**" by Unknown - http://mathematik-online.de/F77.htm.
  Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg#mediaviewer/File:WilliamRowanHamilton.jpeg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 4**: "**WilliamRowanHamilton**" by Unknown - http://mathematik-online.de/F77.htm.

  Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg#mediaviewer/File:WilliamRowanHamilton.jpeg
- **Εικόνα 5**: "**Broom bridge plaque**" by Original uploader was Wisher at en.wikipedia - Transferred from en.wikipedia; transferred to Commons by User:Premeditated Chaos using CommonsHelper.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Broom_bridge_plaque.jpg#mediaviewer/File:Broom_bridge_plaque.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.6: Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- Galois και Θεωρία Ομάδων.
- Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- Emily Noether.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

Αντιμεταθετικοί Δακτύλιοι

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών: παρόλο που τα κύρια προβλήματα είχαν τεθεί ως προς τους ακεραίους, για την επίλυση τους φάνηκε ότι έπρεπε να σκεφτούν τους ακεραίους ως κομμάτι πιο γενικευμένων συστημάτων αριθμών, τους «αλγεβρικούς ακεραίους».

Ένα από τα κύρια ζητήματα που τέθηκε ήταν η ιδιότητα της μοναδικής παραγοντοποίησης.

Dedekind

Το υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών

$$\{a + ib\sqrt{5}: a, b \in \mathbb{Z}\}$$

είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.



Εικόνα 1

Όμως $6 = 2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$

και έτσι δεν έχουμε μοναδική παραγοντοποίηση! (Παρατηρήστε ότι τα στοιχεία $2, 3, (1 + i\sqrt{5}), (1 - i\sqrt{5})$ δεν διαιρούνται από κανένα άλλο στοιχείο της μορφής $a + ib\sqrt{5}$)

Σύνολα-Ιδεώδη (1)

Εάν όμως θεωρήσουμε τα παρακάτω σύνολα/ιδεώδη, (ιδέα του Dedekind το 1871),

$$P = \langle 2,1 + i\sqrt{5} \rangle$$
$$Q = \langle 3,1 + i\sqrt{5} \rangle$$
$$P = \langle 3,1 - i\sqrt{5} \rangle$$

τότε μπορούμε να δείξουμε ότι όλα είναι πρώτα ιδεώδη. Δηλαδή ότι αν ένα γινόμενο στοιχείων ανήκει για παράδειγμα στο P τότε ένα από τα δύο στοιχεία είναι αναγκαστικά μέλος του P.

Επίσης μπορεί να δείξει κανείς ότι

Σύνολα-Ιδεώδη (2)

- $\mathrm{P}^2 = \langle 2 \rangle$.
- $QR = \langle 3 \rangle$.
- $PQ = \left\langle 1 + i\sqrt{5} \right\rangle$.
- $PR = \left\langle 1 - i\sqrt{5} \right\rangle$.

Για να δούμε για παράδειγμα γιατί ισχύει η πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι

- $4^2 = \langle 2^2 \rangle \in \mathrm{P}^2$.
- $2 + 2i\sqrt{5} = 2\left(1 + i\sqrt{5}\right) \in \mathrm{P}^2$.
- $\left(1 + i\sqrt{5}\right)^2 = -4 + 2i\sqrt{5} \in \mathrm{P}^2$.

Σύνολα-Ιδεώδη (3)

και άρα $P^2 \subset \langle 2 \rangle$. Από τα παραπάνω όμως προκύπτει επίσης ότι $2 \in P^2$ και άρα $\langle 2 \rangle \subset P^2$.

Έτσι

$$\langle 6 \rangle = \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle = P^2(QR) = P^2QR$$

Ενώ

$$\langle 6 \rangle = \left\langle 1 + i\sqrt{5} \right\rangle \left\langle 1 - i\sqrt{5} \right\rangle = (\mathrm{PQ})(PR) = P^2QR$$

και έχουμε μοναδική παραγοντοποίηση στο επίπεδο των ιδεωδών!

Δακτύλιος

Ο όρος δακτύλιος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Hilbert το 1892.

Ο πρώτος αξιωματικός ορισμός του δακτυλίου από τον Fraenkel το 1914.

Οι αξιωματικές αρχές της θεωρίας των αντιμεταθετικών δακτυλίων δόθηκαν για πρώτη φορά από τη Noether το 1921.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Dedekind**" by not found - http://dbeveridge.web.wesleyan.edu/wescourses/2001f/chem160/01/Photo_Gallery_Science/Dedekind/FrameSet.htm. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dedekind.jpeg#mediaviewer/File:Dedekind.jpeg

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9: Αφηρημένη Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 9.7: Emily Noether

Χαρά Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Εισαγωγή.
- Επιλύουσες και μεταθέσεις.
- Galois και Θεωρία Ομάδων.
- Οι ομάδες στο έργο του Gauss.
- Μη αντιμεταθετικοί δακτύλιοι οι τετράδες του Hamilton.
- Θεωρία δακτυλίων: ιδεώδη και μοναδική παραγοντοποίηση στο έργο του Dedekind.
- Emily Noether.

Σκοποί Ενότητας

- Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εξηγήσει τι είναι η σύγχρονη «αφηρημένη Άλγεβρα» και να περιγράψει την ιστορική διαδρομή που οδήγησε σε αυτήν. Το τελευταίο μέρος αναφέρεται στην E. Noether, την πιο σημαντική ίσως γυναικεία μαθηματική προσωπικότητα έως σήμερα, και περιγράφει τη συνεισφορά της στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

Noether (1882-1935)



Εικόνα 1

Εργασίες

Η Noether στην εργασία της του 1921 με τίτλο «Θεωρία Ιδεωδών σε δακτυλίους» έδειξε ότι αποτελέσματα του Hilbert (και άλλων) για πολυωνυμικούς δακτυλίους ισχύουν σε κάθε αφηρημένο δακτύλιο για τον οποίο ισχύει η αύξουσα συνθήκη ιδεωδών.

Το 1927 στην εργασία της «Αφηρημένη πρόοδος στην θεωρία ιδεωδών σε αλγεβρικά σώματα αριθμών και σώματα συναρτήσεων» χαρακτήρισε τους αφηρημένους αντιμεταθετικούς δακτυλίους για τους οποίους ισχύει η μοναδική παραγοντοποίηση ιδεωδών σε πρώτα ιδεώδη (βλ. Dedekind)

Emmy Noether



23/03/1882-14/04/1935
Εικόνα 2

Albert Einstein, in a tribute to Emmy Noether, New York Times, 1935



Εικόνα 3

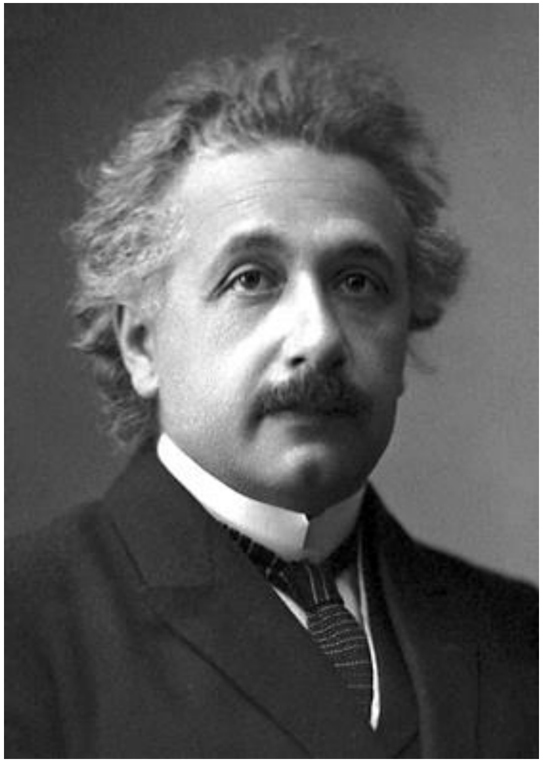
«… Στον κόσμο της άλγεβρας με την οποία σχολούνται εδώ και αιώνες οι πιο προικισμένοι μαθηματικοί, (η Noether) ανακάλυψε μεθόδους που αποδείχτηκαν τεράστιας σημασίας…

Τα καθαρά μαθηματικά με τον δικό τους τρόπο είναι η ποίηση των ιδεών της λογικής…

Σε αυτήν την προσπάθεια κατάκτησης της ομορφιάς της λογικής, έχουν ανακαλυφθεί τύποι του πνεύματος, τύποι αναγκαίοι για την βαθύτερη διείσδυση στους νόμους της φύσης.»

Albert Einstein, in a tribute to Emmy Noether, New York Times, 1935

Einstein-Noether



Εικόνα 4

«Έλαβα χτές μια πολύ ενδιαφέρουσα εργασία από την Δεσποινίδα Noether για αναλλοίωτες συστημάτων. Έχω εντυπωσιασθεί ότι τέτοια πράγματα μπορούν να γίνουν κατανοητά με τέτοιο γενικό τρόπο. Η παλιά φρουρά στο Gottingen μπορεί να μάθει πολλά από την Δεσποινίδα Noether!»

Καινοτομία της Noether



Εικόνα 5

Προσδιορισμός των ιδιοτήτων των συστημάτων που αποκτούν δομή ως προς κάποιες πράξεις.
«αλγεβρικές δομές»: ομάδες, δακτύλιοι, άλγεβρες, modules—
γενικοί κανόνες οδηγούν σε γενικά συμπεράσματα.
Το καινοτόμο που εισήγαγε η Noether είναι να ανακαλύπτει το μέγιστο που θα μπορούσε κάποιος να συμπεράνει από κάποιο σύνολο ιδιοτήτων ή αντίστροφα να προσδιορίζει το ελάχιστο σύνολο των αναγκαίων ιδιοτήτων που ευθύνονται για κάποια συμπεριφορά.

Van der Waerden-Noether

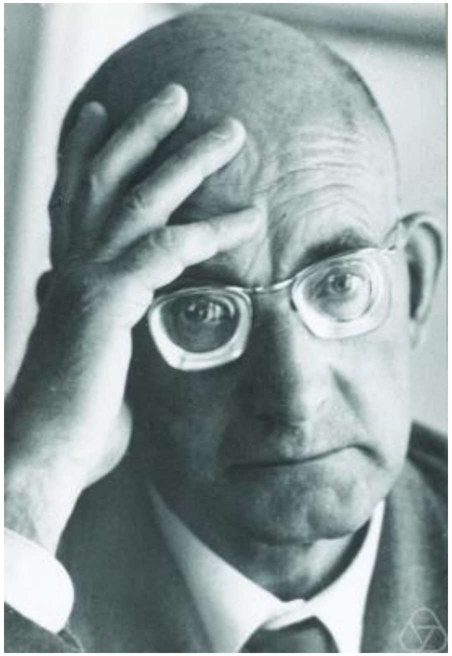


Van der Waerden
Εικόνα 6

«Για την Emmy Noether οι σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς, τις συναρτήσεις και πράξεις γίνονταν σαφείς, ικανές για γενικεύσεις και παραγωγικές μόνο όταν τις αποσυνέδεε από τα συγκεκριμένα αντικείμενα όπου είχαν στηριχθεί και όταν τις είχε ανάγει σε γενικές εννοιολογικές σχέσεις…

…Η μαθηματική της πρωτοτυπία δεν μπορεί να συγκριθεί με κανενός άλλου.»

Alexandrov-Noether

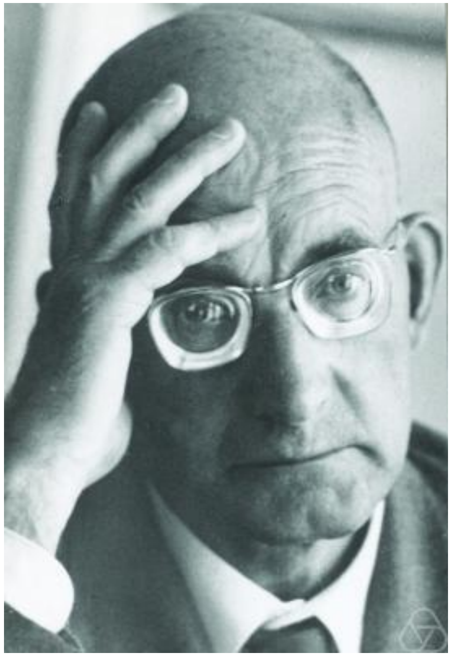


Alexandrov
Εικόνα 7

Ήταν η Emmy που μας δίδαξε πώς να σκεφτόμαστε με απλές και γενικές μαθηματικές έννοιες, για ομομορφισμούς ομάδες και δακτυλίους με πράξεις, ιδεώδη…

Θεωρήματα όπως τα «θεωρήματα των ομομορφισμών και ισομορφισμών», έννοιες όπως η αύξουσα και φθίνουσα συνθήκη σε αλυσίδες υποομάδων και ιδεωδών όλα αυτά πρωτοεισήχθηκαν από την Emmy Noether και έχουν μπει στη καθημερινή πρακτική όλων των μαθηματικών κλάδων…

Alexandrov-Noether



Alexandrov
Εικόνα 8

Αρκεί να δει κανείς τη δουλειά του Pontryagin σε συνεχόμενες ομάδες, του Kolmogorov στην συνδυαστική τοπολογία, την δουλειά του Hopf στις συνεχείς συναρτήσεις κλπ για να νοιώσει την επιρροή των ιδεών της Emmy Noether … η στο βιβλίο του Weyl.

Jacobson-Noether



Jacobson
Εικόνα 9

«Η αφηρημένη άλγεβρα ξεκινά με την δημοσίευση δύο εργασιών της Noether, η πρώτη εργασία από κοινού με τον Schmeidler,

η δεύτερη η μνημειώδης της εργασία στη θεωρία των ιδεωδών … μπορεί να θεωρηθεί ως η πρώτη εργασία στον πλατύ τομέα της αντιμεταθετικής θεωρίας δακτυλίων.»

Weyl-Noether



Weyl
Εικόνα 10

«Η θεωρία των μη-αντιμεταθετικών αλγεβρών και αναπαραστάσεων δομήθηκε απο την Emmy Noether με έναν νέο, ενωμένο, καθαρά εννοιολογικό τρόπο, κάνοντας χρήση όλων των αποτελεσμάτων που είχαν συγκεντρωθεί από τις ιδιοφυείς εργασίες δεκαετιών των Frobenius, Dickson, Wedderburn και άλλων.»

Προς τιμήν της Noether

- Δακτύλιοι και ομάδες της Noether.
- Οι ιδέες της Noether εξελίχθηκαν στον κλάδο της Θεωρίας Κατηγοριών.
- Και οι παρατηρήσεις της οδήγησαν στην δημιουργία του κλάδου της αλγεβρικής τοπολογίας.

Τιμητικές διακρίσεις (1)



Εικόνα 11

- 1907 Διδακτορικό summa cum laude, Erlangen.
- 1908 μέλος του Circolo mathematico di Palermo.
- 1909 μέλος της Deutsche Mathematiker Vereinigung (γερμανική μαθηματική εταιρία).
- 1932 βραβείο Alfred Ackermann-Teubner Memorial Prize for the Advancement of Mathematcal Knowledge (μαζί με τον Artin) 500 Reichsmarks (περίπου 120 ευρώ σήμερα…).

Τιμητικές διακρίσεις (2)



Εικόνα 12

- 1932 Ομιλία στο Διεθνές συνέδριο των Μαθηματικών Zurich International Congress of Mathematicians, 21 ομιλητές και 420 σύνεδροι (πρώτη φορά γυναίκα ομιλήτρια --- η επόμενη φορά ήτανε το 1990 στο Kyoto).
- Εκδότης του Mathematische Annalen.

Ακαδημαϊκές θέσεις

- 1908-1915 λέκτορας στο Πανεπιστήμιο του Erlangen (χωρίς πληρωμή). Επίσης είναι υπεύθυνη και μέντορας δύο διδακτορικών φοιτητών.
- 1916-1922 μέλος της ερευνητικής ομάδας του Hilbert στο Πανεπιστήμιο του Gottingen και στο διάστημα 1916-1919 είναι και λέκτορας (χωρίς πληρωμή).
- 1919 Privatdozent (λέκτορας ομιλητής που επιτρέπεται να πάρει δίδακτρα από σπουδαστές αλλά όχι από το πανεπιστήμιο) Πανεπιστήμιο του Gottingen.
- 1922-1923 nicht-beamteter ausserordentlicher Professor (έκτακτη καθηγήτρια) Gottingen
- 1922-1923 Lehrauftrag (Gottingen)
- 1933-1935 Επισκέπτης Καθηγητής, Bryn Mawr College.

Εκπαίδευση (1)



Εικόνα 13

- 1903 Reifeprufung, Konigliches Realgymnasium, (πτυχίου γυμνασίου) Nuremburg.
- 1907 Διδακτορικό στα Μαθηματικά, Πανεπιστήμιο του Erlangen.
- 1919 habilitation, (υφηγεσία) Πανεπιστήμιο του Gottingen.

Εκπαίδευση (2)



Erlangen, Εικόνα 14



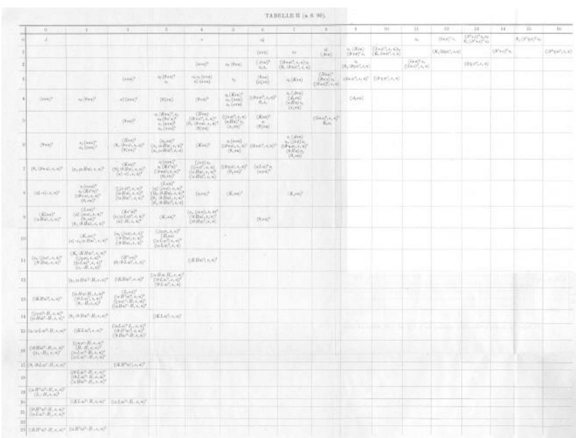
Max Noether
Εικόνα 15



Paul Gordan
Ο βασιλιάς των αναλλοίωτων.
Εικόνα 16

Η διατριβή της Noether

Η διατριβή της Noether «Πλήρη συστήματα σταθερών για τις τριαδικές διτετραγωνικές μορφές»



Η ζούγκλα των εξισώσεων
Εικόνα 17



Ernst Fischer
Εικόνα 18



Hilbert
Εικόνα 19

Οι 3 εποχές του έργου της (1)



Gottingen
Εικόνα 20

1. Εποχή της σχετικής εξάρτησης: 1907-1919.
2. Εποχή έρευνας για την γενικευμένη θεωρία των ιδεωδών 1920-1926.
3. Εποχή μελέτης των μη αντιμεταθετικών αλγεβρών, των αναπαραστάσεων τους με γραμμικές συναρτήσεις και αντιμεταθετικά τοπικά σώματα.

Οι 3 εποχές του έργου της (2)



Κρατικό Πανεπιστήμιο Μόσχας, 1929 (Εβραία, Γυναίκα και ειρηνήστρια)
Εικόνα 21



Ζυρίχη, 1932
Εικόνα 22



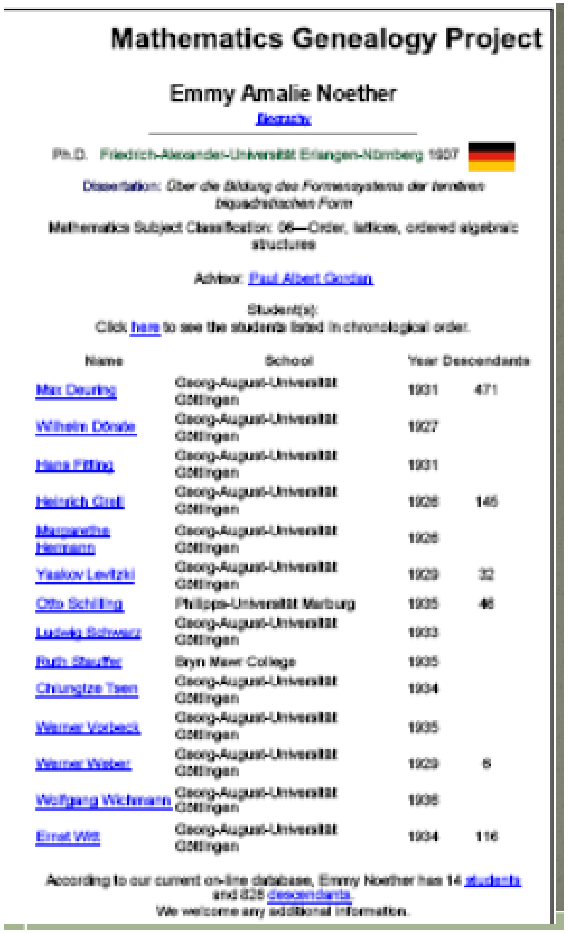
Το κολλέγιο του Bryn Mawr, Ηπα, 1932-1935
Εικόνα 23

Ο κύκλος των μαθητών της

Ο κύκλος των μαθητών της:

«Τα αγόρια της Noether»

Η Noether ως μέντορας, γενναιοδωρία ιδεών, διορατικότητα.



Mathematics Genealogy Project

Emmy Amalie Noether

Biography

Ph.D. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg 1907

Dissertation: *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*

Mathematics Subject Classification: 06—Order, lattices, ordered algebraic structures

Advisor: Paul Albert Gordan

Student(s):
Click here to see the students listed in chronological order.

Name	School	Year	Descendants
Max Deuring	Georg-August-Universität Göttingen	1931	471
Wilhelm Dörnte	Georg-August-Universität Göttingen	1927	
Hans Fitting	Georg-August-Universität Göttingen	1931	
Heinrich Grell	Georg-August-Universität Göttingen	1926	146
Margarethe Hermann	Georg-August-Universität Göttingen	1926	
Yaakov Levitzki	Georg-August-Universität Göttingen	1929	32
Otto Schilling	Philipps-Universität Marburg	1935	46
Ludwig Schwarz	Georg-August-Universität Göttingen	1933	
Ruth Stauffer	Bryn Mawr College	1935	
Chiungtze Tsen	Georg-August-Universität Göttingen	1934	
Werner Vorbeck	Georg-August-Universität Göttingen	1935	
Werner Weber	Georg-August-Universität Göttingen	1929	6
Wolfgang Wichmann	Georg-August-Universität Göttingen	1936	
Ernst Witt	Georg-August-Universität Göttingen	1934	116

According to our current on-line database, Emmy Noether has 14 students and 828 descendants.
We welcome any additional information.

Εικόνα 24

«Der Noether»



Εικόνα 25

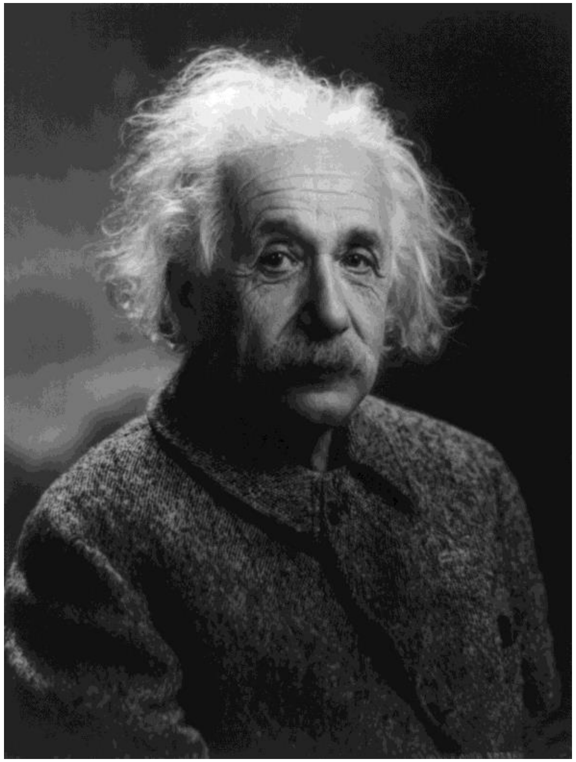
Το παρατσούκλι

«Der Noether»

ως ένδειξη σεβασμού.

Προσωπικότητα πληθωρική, δεν νοιαζόταν για την εμφάνισή της ή για τους τρόπους της.

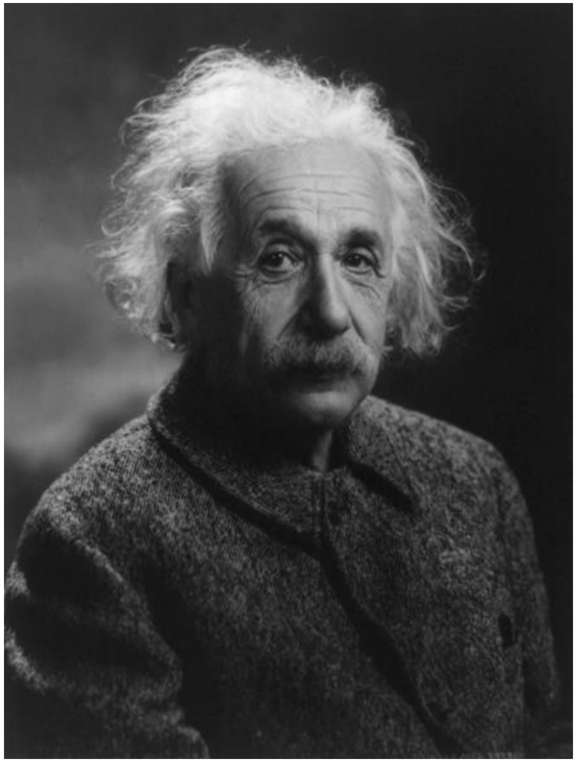
Einstein (1)



Εικόνα 26

«Οι προσπάθειες των περισσότερων ανθρώπων εστιάζονται στην κατάκτηση του καθημερινού επιούσιου. Οι περισσότεροι από αυτούς που είτε χάρι στην τύχη είτε χάρι σε κάποιο ταλέντο δεν έχουν ανάγκη αυτόν τον καθημερινό αγώνα, αναλώνονται στην προσπάθεια μεγιστοποίησης υλικών αγαθών… Υπάρχει, ευτυχώς, μια μειονότητα που αναγνωρίζει ότι οι ομορφότερες και πιο γεμάτες στιγμές που νοιώθει ο άνθρωπος δεν προέρχονται από εξωτερικούς παράγοντες αλλά συνδέονται με καλλιέργεια συναισθημάτων, πράξεων και σκέψεων. Οι γνήσιοι καλλιτάχνες οι ερευνητές και οι άνθρωποι της σκέψης είναι σε αυτήν την κατηγορία.

Einstein (2)



Εικόνα 27

Όσο σεμνή και να είναι η πορεία της ζωής τους, οι καρποί των προσπαθειών τους είναι οι πολυτιμότερες συνεισφορές που μια γενεά μπορεί να κάνει στις επόμενες…»

Λίγες μέρες νωρίτερα μία διακεκριμένη μαθηματικός, η Καθηγήτρια Emmy Noether,…, πέθανε στο πεντηκοστό τρίτο έτος της ηλικίας της. Κατά την κρίση των ικανότερων εν ζωή μαθηματικών, η Δις Noether ήταν η πιο σημαντική δημιουργική μαθηματική ιδιοφυία που υπήρξε από τότε που άρχισε η ανώτερη εκπαίδευση των γυναικών έως σήμερα…»

Einstein

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/8)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "**Noether**" by Unknown - http://www.nhn.ou.edu/~jeffery/course/c_energy/energyl/lec001.html. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Noether.jpg#mediaviewer/File:Noether.jpg
- **Εικόνα 2**: http://www.britannica.com/EBchecked/media/39562/Emmy-Noether Credit: Bryn Mawr College Archives
- **Εικόνα 3**: http://www.amt.edu.au/biognoether.html

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/8)

- **Εικόνα 4**: "**Albert Einstein (Nobel)**" by Unknown - Official 1921 Nobel Prize in Physics photograph. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Albert_Einstein_(Nobel).png#mediaviewer/File:Albert_Einstein_(Nobel).png
- **Εικόνα 5**: Εικόνα 2
- **Εικόνα 6**: http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=12581
- **Εικόνα 7, 8**: "**Paul S Alexandroff** 2" by Konrad Jacobs, Erlangen - Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=46. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0-de via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paul_S_Alexandroff_2.jpg#mediaviewer/File:Paul_S_Alexandroff_2.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/8)

- **Εικόνα 9**: "Nathan Jacobson" by http://owpdb.mfo.de/. Licensed under CC BY-SA 2.0 de via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nathan_Jacobson.jpg#/media/File:Nathan_Jacobson.jpg
- **Εικόνα 10**: "**Hermann Weyl ETH**-Bib Portr 00890" by ETH Zürich - ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hermann_Weyl_ETH-Bib_Portr_00890.jpg#mediaviewer/File:Hermann_Weyl_ETH-Bib_Portr_00890.jpg
- **Εικόνα 11**: Εικόνα 2
- **Εικόνα 12**: Εικόνα 2
- **Εικόνα 13**: Εικόνα 1

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/8)

- **Εικόνα 14**: "Erlangen 1916" by Anonymous (see Image:Erlangen - Bahnhof.jpg and Image:Erlangen - Schlossplatz.jpg) - 1916 postcard, scanned by Flominator. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Erlangen_1916.jpg#/media/File:Erlangen_1916.jpg
- **Εικόνα 15**: "Noether 2514" by University of Heidelberg - http://www.ub.uni-heidelberg.de/helios/fachinfo/www/math/edd/uni-archiv/noether.htm. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Noether_2514.JPG#/media/File:Noether_2514.JPG

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/8)

- **Εικόνα 16**: "Paul Albert Gordan" by http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/gordan.html. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paul_Albert_Gordan.jpg#/media/File:Paul_Albert_Gordan.jpg
- **Εικόνα 17**: "Emmy Noether - Table of invariants 2" by en:Emmy Noether - Journal für die reine und angewandte Mathematik 134. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Emmy_Noether_-_Table_of_invariants_2.jpg#/media/File:Emmy_Noether_-_Table_of_invariants_2.jpg
- **Εικόνα 18**: http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/fischer.html

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/8)

- **Εικόνα 19**: "Hilbert". Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert.jpg#/media/File:Hilbert.jpg
- **Εικόνα 20**: "**Göttingen Aula May06**" by Daniel Schwen - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:G%C3%B6ttingen_Aula_May06.jpg#mediaviewer/File:G%C3%B6ttingen_Aula_May06.jpg
- **Εικόνα 21**: "**Moscow 05-2012 Mokhovaya 05**" by A.Savin (userpage · contact) - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0-2.5-2.0-1.0 via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moscow_05-2012_Mokhovaya_05.jpg#mediaviewer/File:Moscow_05-2012_Mokhovaya_05.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (7/8)

- **Εικόνα 22**: "**Zuerich vier Kirchen**" by Ikiwaner - Own work (Eigenes Bild). Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Zuerich_vier_Kirchen.jpg#mediaviewer/File:Zuerich_vier_Kirchen.jpg
- **Εικόνα 23**: "**Bryn Mawr College Cloisters**" by Jeffrey M. Vinocur - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution 2.5 via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bryn_Mawr_College Cloisters.JPG#mediaviewer/File:Bryn_Mawr_College_Cloisters.JPG
- **Εικόνα 24**: http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=6967
- **Εικόνα 25**: Εικόνα 2

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (8/8)

- **Εικόνα 26**: "**Albert Einstein 1947**" by Photograph by Oren Jack Turner, Princeton, N.J. - The Library of Congress. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Albert_Einstein_1947.jpg#mediaviewer/File:Albert_Einstein_1947.jpg
- **Εικόνα 27**: Εικόνα 26

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 10: Γραμμική Άλγεβρα

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 10.1: Μία σύντομη ιστορία της γραμμικής άλγεβρας

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Μία σύντομη ιστορία της γραμμικής άλγεβρας.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή γίνεται μία σύντομη ιστορική επισκόπηση των βασικών εννοιών της γραμμικής άλγεβρας, ξεκινώντας από την επίλυση γραμμικών συστημάτων στην αρχαιότητα, έως την εμφάνιση του όρου «γραμμική άλγεβρα» (όπως χρησιμοποιείται σήμερα) στα μέσα του περασμένου αιώνα.

Βασικές Έννοιες τη Γραμμικής Άλγεβρας

- Πίνακες
- Γραμμικές εξισώσεις
- Ορίζουσες
- Διανυσματικοί χώροι
- Γραμμική ανεξαρτησία
- Διάσταση
- Διγραμμικές μορφές
- ....

Γραμμικά συστήματα και πίνακες: η αρχή

- Περίπου το 300 π.Χ. οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι έλυναν προβλήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.
- Οι Κινέζοι ανάμεσα στο 200 π.Χ. με 100 π.Χ. χρησιμοποίησαν πίνακες, π.χ. στα «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης» (Δυναστείας Han). (Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν είναι ουσιαστικά η μέθοδος του Gauss).

Cardano

- Ο Cardano στο βιβλίο του Ars Magna (το Μεγάλο Έργο) το 1545 δίνει έναν κανόνα που είναι ουσιαστικά ο κανόνας του Cramer για την επίλυση 2 εξισώσεων, προσεγγίζοντας την έννοια της ορίζουσας.

Εικόνα 1



Seki

Στην Ιαπωνία ο Seki το 1683 έγραψε την «μέθοδος επίλυσης των απόκρυφων προβλημάτων» όπου εισήγαγε τις ορίζουσες και έδωσε μεθόδους για τον υπολογισμό τους (χωρίς όμως να τις ορίσει ως αυτόνομη έννοια).

1642 – 1708
Ιαπωνία
Εικόνα 2



Leibniz

- Την ίδια ακριβώς ημερομηνία (1683) στην Ευρώπη ο Leibniz σε ένα γράμμα του στον de L'Hospital εξηγούσε τη συνθήκη στην ορίζουσα (χωρίς να την ονομάζει έτσι) για να είναι συμβατό ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Δούλεψε σε αυτά από το 1678 και μετά, ως το τέλος της ζωής του. Στα κείμενά του έδειχνε διάφορους τρόπους για τον υπολογισμό της ορίζουσας.

1646 – 1716
Γερμανία
Εικόνα 3



Cramer

- Ο Cramer to 1750 δίνει τον γενικό κανόνα που είναι σήμερα γνωστός με το όνομά του για τη λύση ενός nxn συστήματος. Η προσπάθειά του ήταν να βρει την εξίσωση μίας καμπύλης που περνάει από δεδομένο αριθμό σημείων.

1704-1752
Ελβετία
Εικόνα 4



Ορίζουσες

Bezout (1764)
1730-1783 Γαλλία
Εικόνα 5



Vandermonde
(1771)
1735 - 1796

Laplace (1772)
(διακρίνουσα=ορίζουσα)
Εικόνα 6



1749 – 1827
Γαλλία

Maclaurin

- Ο Maclaurin έγραψε το 1730 την «πραγματεία της άλεβρας». Αυτή εκδόθηκε το 1748 και περιέχει τα πρώτα δημοσιευμένα αποτελέσματα πάνω στις ορίζουσες.

1698 - 1746
Σκωτία
Εικόνα 7



Gauss (1)

- Το 1801 στην εργασία του Disquisitiones arithmeticae εξετάζει τετραγωνικές μορφές και εισάγει τον όρο «ορίζουσα». Γράφει τους συντελεστές μίας τετραγωνικής μορφής σε τετράγωνους πίνακες, περιγράφει τον πολλαπλασιασμό πινάκων ως σύνθεση συναρτήσεων-μορφών, και αντιστρόφους.



1777-1855
Γερμανία
Εικόνα 8

Gauss (2)

- Χρησιμοποιεί τη μέθοδο απαλοιφής για τη μελέτη της τροχιάς του αστεροειδούς Αθηνά, σε ένα σύστημα με 6 εξισώσεις και 6 αγνώστους.



Εικόνα 9

Cauchy

- ορίζουσα- θεώρημα πολλαπλασιασμού (1812)
- όρο «πίνακα» (array) (1826)
- ιδιοτιμές
- διαγωνιοποίηση πινάκων.
- ιδιότητες ομοίων πινάκων.



Εικόνα 10

Jacobi - Kronecker - Weierstrass

Jacobi (1841)
1804-1851
Εικόνα 11

Kronecker (1850)
1823 – 1891
Εικόνα 12

Weierstrass (1860)
1815-1897
Εικόνα 13





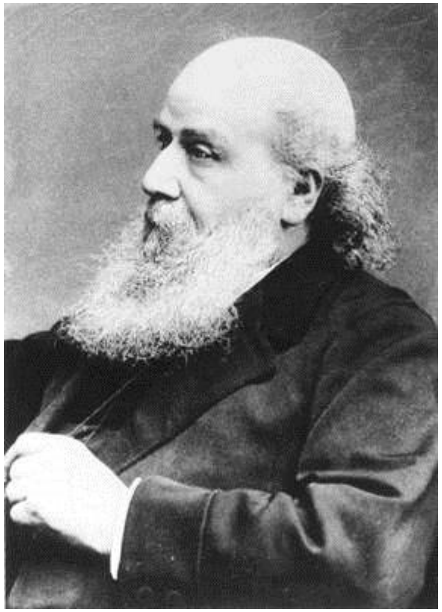


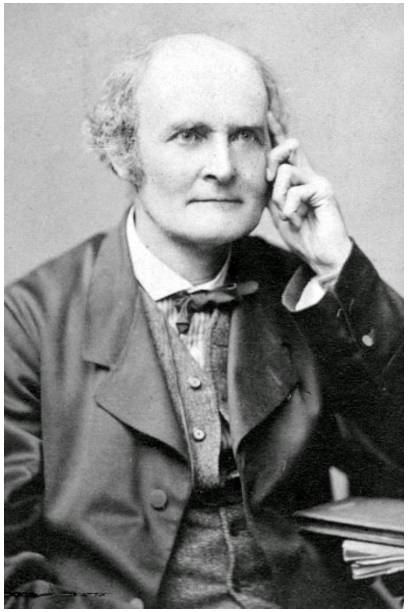
Cayley και Sylvester Μαθηματικοί και Δικηγόροι

- Ο όρος «matrix» (μητρώο) πρωτοει-σήχθηκε από τον Sylvester to 1850.
- Cayley είχε δημοσιεύσεις στο θέμα των οριζουσών από το 1841. Το 1858 αφού συνάντησε τον Sylvester δημοσίευσε το «Μνημόνιο στη θεωρία των πινάκων»

Sylvester - Cayley

Sylvester	Cayley
1814-1897	1821-1895
Εικόνα 14	Εικόνα 15



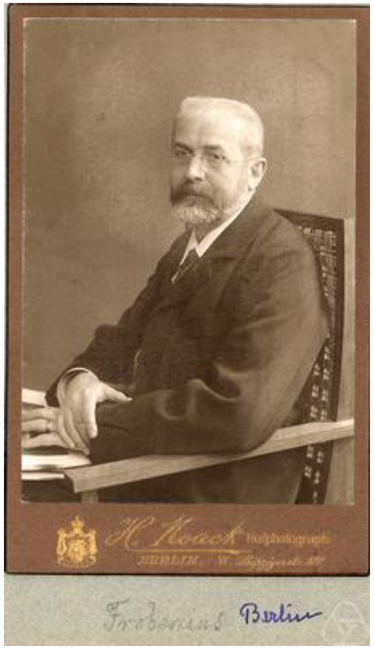


Cayley

- Ο Cayley εισήγαγε τον συμβολισμό |A| για την ορίζουσα του A.
- Συνένωσε τα προηγούμενα αποτελέσματα.
- Όρισε την άλγεβρα των πινάκων ορίζοντας την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό, τον σκαλιανό πολλαπλασιασμό και τα αντίστροφους πινάκων.
- Απέδειξε ότι οι 2x2 πίνακες ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση και το έλεγξε για 3x3.

Frobenius

- Βαθμίδα πίνακα (1878) 1849-1817Γερμανία
- Κάθε πίνακας ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση (1878)
- Το μετονόμασε Θεώρημα των Cayley-Hamilton αφού διάβασε το βιβλίο του Cayley (1896)



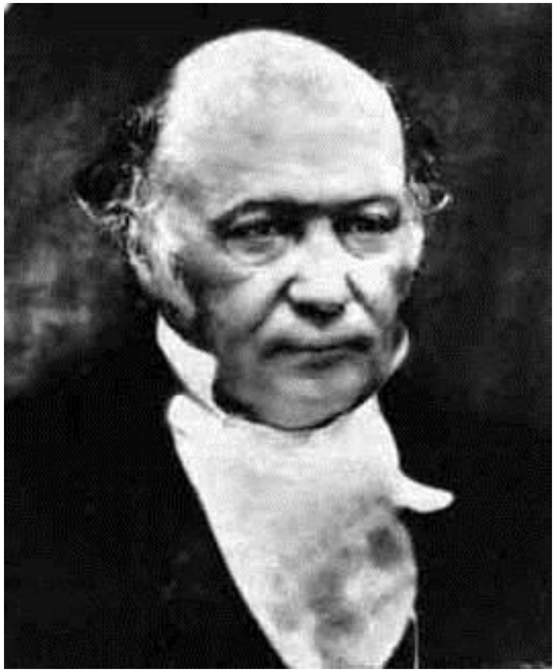
Εικόνα 16

Θεωρία των οριζουσών σε αξιωματική βάση

- Το 1903 μετά τον θάνατό τους δημοσιεύτηκαν δύο εργασίες, των Weierstrass και Kronecker που έθεταν την θεωρία των οριζουσών σε αξιωματική βάση.

Διάνυσμα

1805-1865
Εικόνα 17



- Cayley (1843 διάσταση)
- Hamilton (1843: τετράδες του Hamilton---όρο διάνυσμα)

Grassman

- (1844)
- Εννοιες n-διάστατου διανυσματικού χώρου
- Υποχώρου
- Βάσης
- Διάστασης
- Γραμμικού μετασχηματισμού

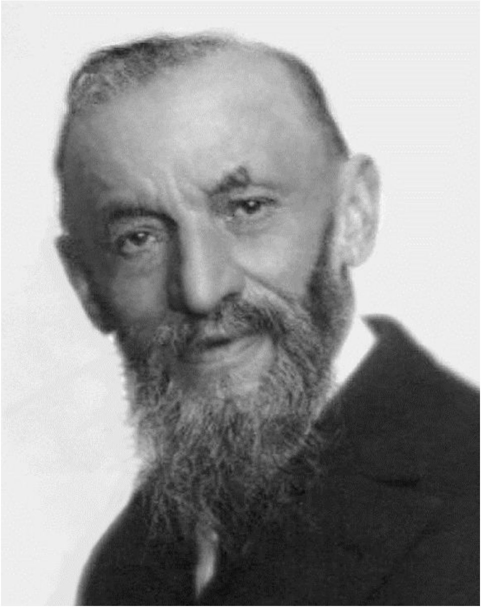
1809-1877
Εικόνα 18



Peano

- Ο Peano το 1888 επηρεάστηκε από τον Grassman και έδωσε τον αξιωματικό ορισμό διανυσματικού χώρου πάνω από τους πραγματικούς και απέδειξε διάφορα θεωρήματα για τη διάσταση. Όμως οι ιδέες του δεν έγιναν άμεσα αποδεκτές.

1858-1932
Ιταλία
Εικόνα 19



Διανυσματικοί Χώροι (1)

Weyl (1918) Θεωρία της σχετικότητας, (γεωμετρία)
1885-1955 Γερμανία
Εικόνα 20



Banach (1920) μοντέρνα μορφή, (ανάλυση)
1892-1945 Αυστρία
Εικόνα 21



Διανυσματικοί Χώροι (2)

- Emmy Noether 1921

(άλγεβρα)

1882-1935



Εικόνα 22

Διανυσματικοί Χώροι (3)

- Van der Waerden στο κλασσικό του βιβλίο Modern Algebra (1930), έχει κεφάλαιο με τίτλο Linear Algebra, όπου ο όρος χρησιμοποιείται όπως και σήμερα.



1903-1996
Ολλανδία
Εικόνα 23

Το πρώτο διδακτικό βιβλίο προπτυχιακής μοντέρνας γραμμικής άλγεβρας (?)

1955 Mirsky

«An introduction to linear algebra»

1918-1983



Εικόνα 24

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/8)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: "Cardano" by Gerolamo Cardano (1501-1576) - http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Cardano.jpg (de:Benutzer:ChristianGruchow). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cardano.jpg#mediaviewer/File:Cardano.jpg
- **Εικόνα 2**: "Seki" by upload by F. Lembrez - http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Seki.jpeg#mediaviewer/File:Seki.jpeg
- **Εικόνα 3**: "Wag gottfried wilhelm leibnitz" by William Anthony Granville, Ph.D., LL.D. - Elements of the Differential and Integral Calculus (revised), The Athenæum Press, Ginn and Company, Boston, U.S.A., 1911.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons -

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/8)

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wag_gottfried_wilhelm_leibnitz.jpg#mediaviewer/File:Wag_gottfried_wilhelm_leibnitz.jpg

- **Εικόνα 4**: "Gabriel Cramer" by Original uploader was Bobbyfossil at en.wikipedia - Transferred from en.wikipedia; transfer was stated to be made by User:Calle.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gabriel_Cramer.jpg#mediaviewer/File:Gabriel_Cramer.jpg
- **Εικόνα 5**: "Etienne Bezout2" by Unknown - http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Bezout.html. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons -http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Etienne_Bezout2.jpg#mediaviewer/File:Etienne_Bezout2.jpg
- **Εικόνα 6**: "Pierre-Simon-Laplace (1749-1827)". Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre-Simon-Laplace_(1749-1827).jpg#mediaviewer/File:Pierre-Simon-Laplace_(1749-1827).jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/8)

- **Εικόνα 7**: "Colin Maclaurin (Buchan-Ferguson)". Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Colin_Maclaurin_(Buchan-Ferguson).jpg#mediaviewer/File:Colin_Maclaurin_(Buchan-Ferguson).jpg
- **Εικόνα 8**: "Bendixen - Carl Friedrich Gauß, 1828" by Siegfried Detlev Bendixen - published in "Astronomische Nachrichten" 1828. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg#mediaviewer/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gau%C3%9F,_1828.jpg
- **Εικόνα 9**: "Carl Friedrich Gauss" by Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/8)

- **Εικόνα 10**: "Augustin-Louis Cauchy 1901" by Public domain - Library of Congress Prints and Photographs Division. From an illustration in: Das neunzehnte Jahrhundert in Bildnissen / Karl Werckmeister, ed. Berlin : Kunstverlag der photographische gesellschaft, 1901, vol. V, no. 581.. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg#mediaviewer/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg
- **Εικόνα 11**: "Carl Jacobi" by Unknown -http://www.sil.si.edu/digitalcollections /hst/scientific-identity/explore.htm (reworked). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File: Carl_Jacobi.jpg#mediaviewer/File:Carl_Jacobi.jpg
- **Εικόνα 12**:"Leopold Kronecker 1865" by Unknown - http://www.britannica.com / EBchecked/media/28346/Kronecker-1865. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons. wikimedia.org/wiki/File:Leopold_Kronecker_1865.jpg#mediaviewer/File:Leopold_Kronecker_1865.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/8)

- **Εικόνα 13**: "Karl Weierstrass". Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Karl_Weierstrass.jpg #mediaviewer/File:Karl_Weierstrass.jpg
- **Εικόνα 14**: "James Joseph Sylvester" by from:http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Untitled04.jpg. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:James_Joseph_Sylvester.jpg#mediaviewer/File:James_Joseph_Sylvester.jpg
- **Εικόνα 15**: "Arthur Cayley" by http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cayley.html. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arthur_Cayley.jpg#mediaviewer/File:Arthur_Cayley.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/8)

- **Εικόνα 16**: "GeorgFrobenius" by Furfur - (de): Oberwolfach Photo Collection, aus einem Fotoalbum der Mathematischen Gesellschaft (Hamburg)(en): Oberwolfach Photo Collection, from a photo album of the Mathematische Gesellschaft (Hamburg). Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeorgFrobenius.jpg#mediaviewer/File:GeorgFrobenius.jpg
- **Εικόνα 17**: "WilliamRowanHamilton" by Unknown - http://mathematik-online.de/F77.htm. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:WilliamRowanHamilton.jpeg#mediaviewer/File:WilliamRowanHamilton.jpeg
- **Εικόνα 18**: "Hermann Graßmann" by Unknown - http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BigPictures/Grassmann.jpeg. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hermann_Gra%C3%9Fmann.jpg#mediaviewer/File:Hermann_Gra%C3%9Fmann.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (7/8)

- **Εικόνα 19**: "Giuseppe Peano" by Unknown - School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland [1]. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giuseppe_Peano.jpg#mediaviewer/File:Giuseppe_Peano.jpg
- **Εικόνα 20**: "Hermann Weyl ETH-Bib Portr 00890" by ETH Zürich - ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hermann_Weyl_ETH-Bib_Portr_00890.jpg#mediaviewer/File:Hermann_Weyl_ETH-Bib_Portr_00890.jpg
- **Εικόνα 21**: "عالم الرياضيات البولندى ستيفان بناخ"by Hussein abdulhakim - Own work. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:%D8%B9%D8%A7%D9%84%D9%85_%D8%A7%D9%84%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A%D8%A7%D8%AA_%D8%A7%D9%84%D8%A8%D9%88%D9%84%D9%86%D8%AF%D9%89_%

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (8/8)

D8%B3%D8%AA%D9%8A%D9%81%D8%A7%D9%86_%D8%A8%D9%86%D8%A7%D8%AE.jpg#mediaviewer/File:%D8%B9%D8%A7%D9%84%D9%85_%D8%A7%D9%84%D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%B6%D9%8A%D8%A7%D8%AA_%D8%A7%D9%84%D8%A8%D9%88%D9%84%D9%86%D8%AF%D9%89_%D8%B3%D8%AA%D9%8A%D9%81%D8%A7%D9%86_%D8%A8%D9%86%D8%A7%D8%AE.jpg

- **Εικόνα 22**: "Noether" by Unknown - Emmy Noether (1882-1935). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Noether.jpg#mediaviewer/File:Noether.jpg
- **Εικόνα 23**: https://www.library.ethz.ch/Ressourcen/Digitale-Bibliothek/Kurzportraets/Bartel-Leendert-van-der-Waerden-1903-bis-1996
- **Εικόνα 24**: http://www.nndb.com/people/194/000022128/

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 10: Γραμμική Άλγεβρα. Ενότητα 10.1: Μία σύντομη ιστορία της γραμμικής άλγεβρας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 11: Περιήγηση στην Ιστορία της Στατιστικής

Χρόνη Μωυσιάδη (καθηγητή ΑΠΘ)

και Τάκη Παπαιωάννου

(ομότιμου καθηγητή Πανεπ. Ιωαννίνων και Πειραιώς)

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιστορία της Στατιστικής.

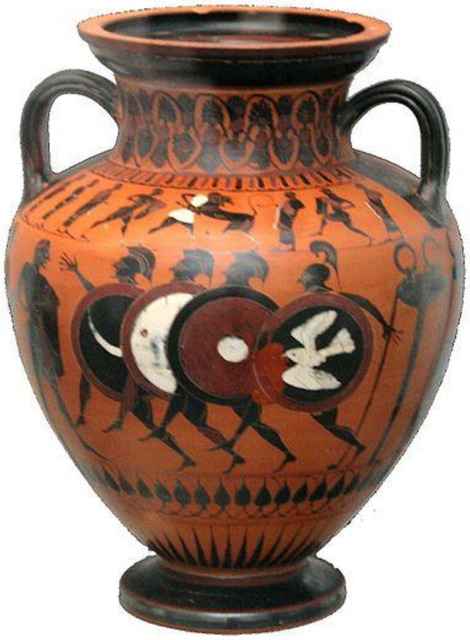
Σκοποί Ενότητας

- Περιήγηση στην Ιστορία της Στατιστικής.

Από την αρχαιότητα μέχρι το 1500

450 π.Χ.

Ο Υππίας της αρχαίας Ηλείας χρησιμοποιεί τη **μέση τιμή** του χρόνου διάρκειας μιας βασιλείας για να προσδιορίσει την ημερομηνία των πρώτων Ολυμπιακών Αγώνων, περίπου 300 χρόνια πριν απο την εποχή του. Γνώριζε πόσοι βασιλείς είχαν προηγηθεί.



Εικόνα 1
Οπλιτοδρομία 550 π.Χ.

431 π.Χ. Το ύψος των τειχών

431 π.Χ.

Οι επιτιθέμενοι στις Πλαταιές κατά τον Πελοποννησιακό Πόλεμο υπολογίζουν το ύψος των τειχών μετρώντας τον αριθμό (το πλήθος) των σειρών απο τούβλα.



Εικόνα 2

Συχνή τιμή (mode)

Η μέτρηση επαναλαμβάνεται αρκετές φορές από διαφορετικούς στρατιώτες.

Η πλέον **συχνή τιμή (mode)** λαμβάνεται ως η πιο πιθανή. Πολλαπλασιάζοντας την τιμή αυτή με το ύψος του τούβλου επέτρεπε στους επιτιθέμενους να υπολογίζουν το μήκος της σκάλας που θα αρκούσε για να αναρριχηθούν στα τείχη.



Εικόνα 3

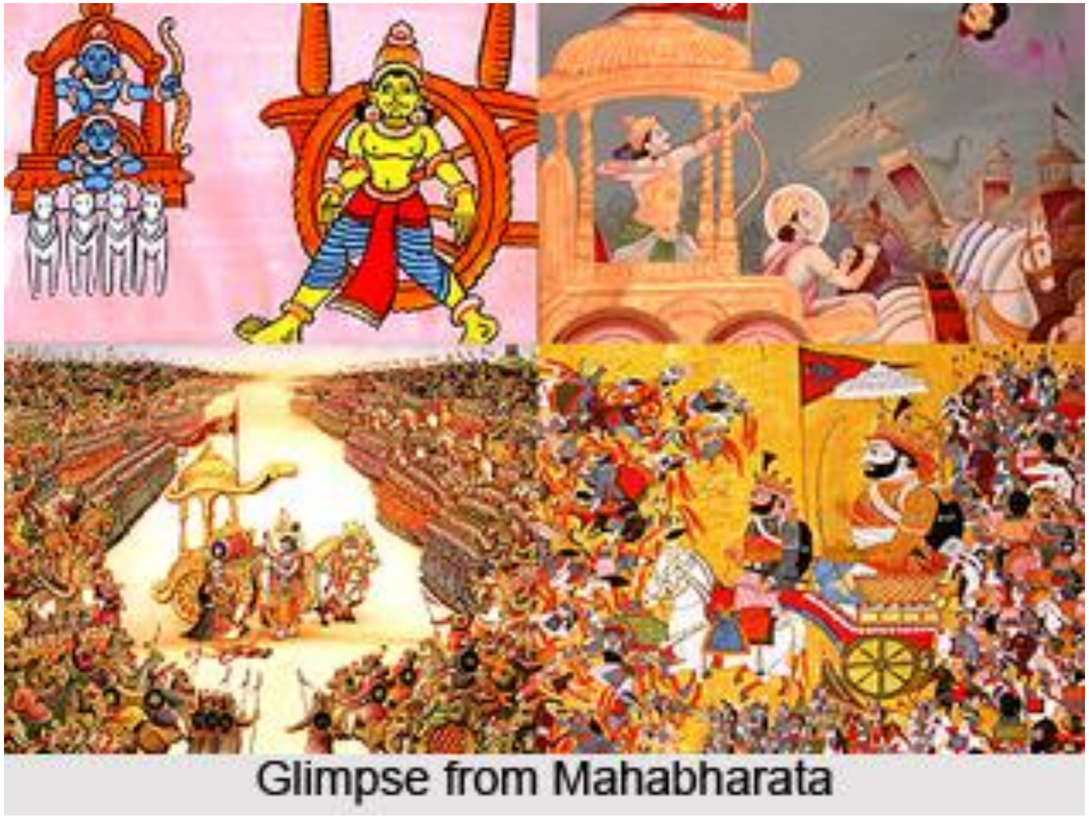
Δειγματοληψία

400 π.Χ.

Στο Ινδικό έπος η Mahabharata, ο Βασιλιάς Rtuparna εκτιμά το πλήθος (τον αριθμό) των φρούτων και των φύλλων του δένδρου vibhikata (δένδρο που ευδοκιμεί στη ΝΑ Ασία με καρπούς σαν ζάρια και με πολλές θεραπευτικές ιδιότητες) καταμετρώντας τούς καρπούς και τα φύλλα σε **ένα** κλαδί και μετά πολλαπλασιάζοντας με τον αριθμό των κλαδιών. Οι εκτιμητές που προέκυψαν (2095 φρούτα και 50 000 000 φύλλα) ήταν πολύ κοντά στις πραγματικές (αληθινές) τιμές.

Αυτό αποτελεί το πρώτο καταγραφέν παράδειγμα **δειγματοληψίας** – «αλλά αυτή η γνώση κρατήθηκε μυστική» λέει το έπος.

Glimpse from Mahabharata



Εικόνα 4

Απογραφή

0 μ.Χ.(7 μ.Χ.)

Η **απογραφή** απο τον κυβερνήτη της Ρωμαϊκής επαρχίας της Ιουδαίας Κυρήνιο.

Μνημονεύεται στο κατά Λουκάν Ευαγγέλιο ως ο λόγος του ταξιδιού του Ιωσήφ και της Μαρίας στη Βηθλεέμ για να φορολογηθούν.



Εικόνα 5

Κινέζικη απογραφή

(206 π.Χ. - 9 μ.Χ.) και (25-220 μ.Χ.)

Κινέζικη απογραφή κατά τη διάρκεια της Δυναστείας του Han βρίσκει πληθυσμό 57.67 εκατομμύρια κατοίκων σε 12.36 εκατομμύρια νοικοκυριά – η πρώτη **απογραφή πληθυσμού** για την οποία υπάρχουν δεδομένα και η οποία θεωρείται ακόμη και απο τους ειδικούς ως ακριβής.

1ος αιώνας π.Χ.



Εικόνα 6
Σινικό τείχος (δυναστεία Χαν)

Ανάλυση συχνοτήτων

840 μ.Χ.

Ο μαθηματικός Al – Kindy, Μωαμεθανός φιλόσοφος, ιατρός και μουσικός, γνωστός και ως ο φιλόσοφος των Αράβων, απο το Ιράκ, χρησιμοποιεί **ανάλυση συχνοτήτων** για να 'σπάσει' μυστικούς κώδικες. Π.χ. τα πλέον συχνά σύμβολα σε ένα κωδικοποιημένο μήνυμα αντιπροσωπεύουν τα πλέον συχνά γράμματα. Επιπλέον ο Al – Kindy εισάγει τους Αραβικούς (σημερινούς) αριθμούς (ψηφία) στην Ευρώπη.

Αραβικός κώδικας – ανάλυση συχνοτήτων

840 μ.Χ.

Εικόνα 7



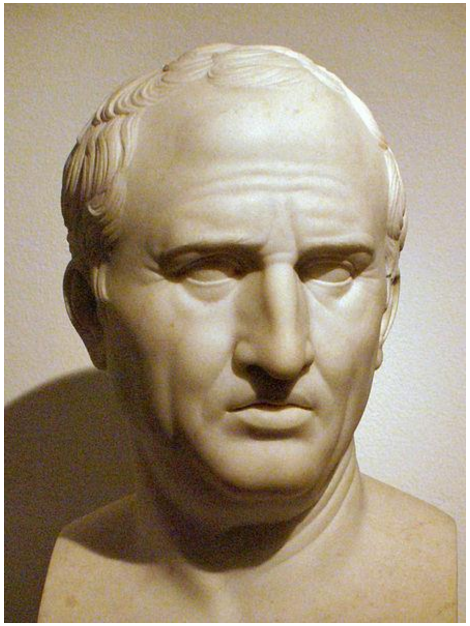
Γράφημα - Βιβλίο Κικέρωνα

10ος αιώνας

Το πρώτο χρονολογικά γνωστό **γράφημα**, σε σχολιασμό βιβλίου του Κικέρωνα, παρουσιάζει την κίνηση των πλανητών στον ζωδιακό κύκλο. Προφανώς επρόκειτο να χρησιμοποιηθεί στα σχολεία των μοναστηριών.

Μάρκος Τύλλιος Κικέρων

106-43 π.Χ.



Εικόνα 8
Πολιτικός, δικηγόρος, ρήτορας και φιλόσοφος

Απογραφή – Επίσημες Στατιστικές στην Αγγλία

1069 μ.Χ.

Βιβλίο Domesday: **Απογραφή** για τον Ουίλιαμ τον Κατακτητή αγροκτημάτων, χωριών, και κτηνοτροφίας στο καινούργιο του βασίλειο.

Είναι η αρχή των **επίσημων στατιστικών** στην Αγγλία. Το βιβλίο Domesday είναι το παλαιότερο δημόσιο αρχείο που υπάρχει στην Αγγλία.



Εικόνα 9

Trial of the Pyx

1150 μ.Χ.

Δοκιμή του Pyx (Trial of the Pyx) (απο το ελληνικό πυξίδα – πυξός): αρχίζει ο ετήσιος έλεγχος της καθαρότητας των νομισμάτων που παράγονται απο το Βασιλικό Νομισματοκοπείο της Αγγλίας.

Τα νομίσματα επιλέγονταν ***τυχαία*** με σταθερές προκαθορισμένες αναλογίες ως προς τον αριθμό νομισμάτων που κόπτονται. Ο έλεγχος συνεχίζεται μέχρι σήμερα.



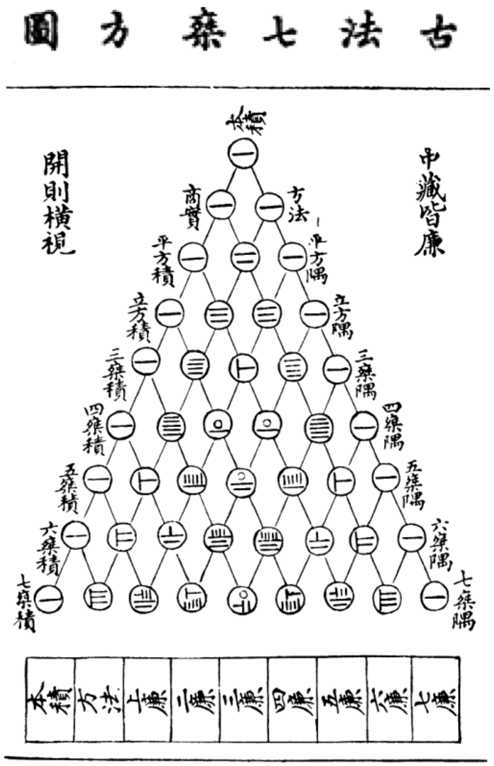
Εικόνα 10

Πληθυσμιακή απογραφή Ουαλίας

1188.

Ο Gerald της Ουαλίας (ιερωμένος του μεσαίωνα και χρονογράφος της εποχής του) ολοκλήρωσε την πρώτη **πληθυσμιακή απογραφή** της Ουαλίας.

Τρίγωνο του Pascal το 1303



Εικόνα 11

Διωνυμικοί συντελεστές

1303

Κινέζικο διάγραμμα με τίτλο «Ο παλαιός χάρτης της μεθόδου των επτά πολλαπλασιαζόμενων τετραγώνων» παρουσιάζει τους **διωνυμικούς συντελεστές** μέχρι τη δύναμη του οκτώ, τους συντελεστές που είναι θεμελιακοί στα μαθηματικά των πιθανοτήτων και εμφανίστηκαν πεντακόσια χρόνια μετά στη Δύση ως τρίγωνο του Pascal.

Νέα χρονικά – Giovanni Villani

- **1346** Το *Nuova Cronica (Νεα Χρονικά)* του Giovanni Villani* δινει στατιστική πληροφόρηση για τον πληθυσμό και το εμπόριο της Φλωρεντίας.

*Τα Νέα Χρονικά είναι μια ιστορία της Φλωρεντίας του $14^{ου}$ αιώνα που δημιουργήθηκε χρόνο με το χρόνο και γράφτηκε, αρχικά, απο τον Φλωρεντινό τραπεζίτη και αξιωματούχο Villani. Περιγράφει με λεπτομέρια τα κτήρια της πόλης, και δίνει **στατιστικές πληροφορίες** για τον πληθυσμό, το εμπόριο, την παιδεία, τη θρησκεία, τις καταστροφές κλπ. Εχει αναφερθεί ως μια πρώτη εισαγωγή στη Στατιστική.

Η Μαθηματική θεμελίωση (1500-1900)

1560 μ.Χ. Ο Geronymo Cardano , ιταλός μαθηματικός, φυσικός , γιατρός και παίχτης (gambler) της Αναγέννησης υπολογίζει τις πιθανότητες διαφόρων ρίψεων δυο ζαριών για τους παίκτες των τυχερών παιχνιδιών.



Εικόνα 12
1501-1576

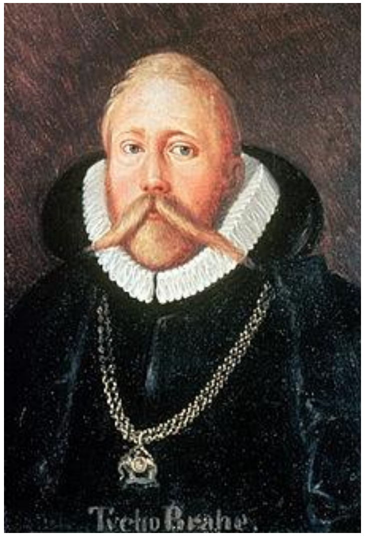


Εικόνα 13

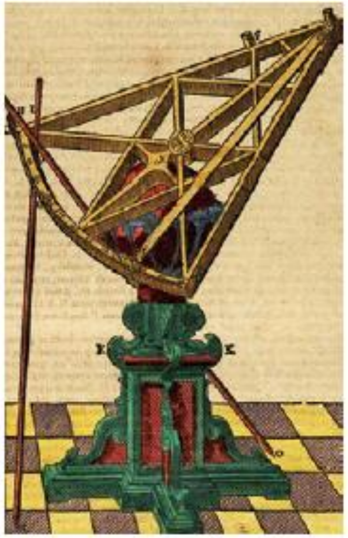
Αστρονομία – αριθμητικός μέσος

1570

Ο αστρονόμος Tycho Brache, Δανός ευγενής γνωστός για τις ακριβείς και λεπτομερείς πλανητικές παρατηρήσεις του, χρησιμοποιεί τον **αριθμητικό μέσο** για να μειώσει τα σφάλματα των εκτιμητών του για τις θέσεις των αστέρων και των πλανητών.



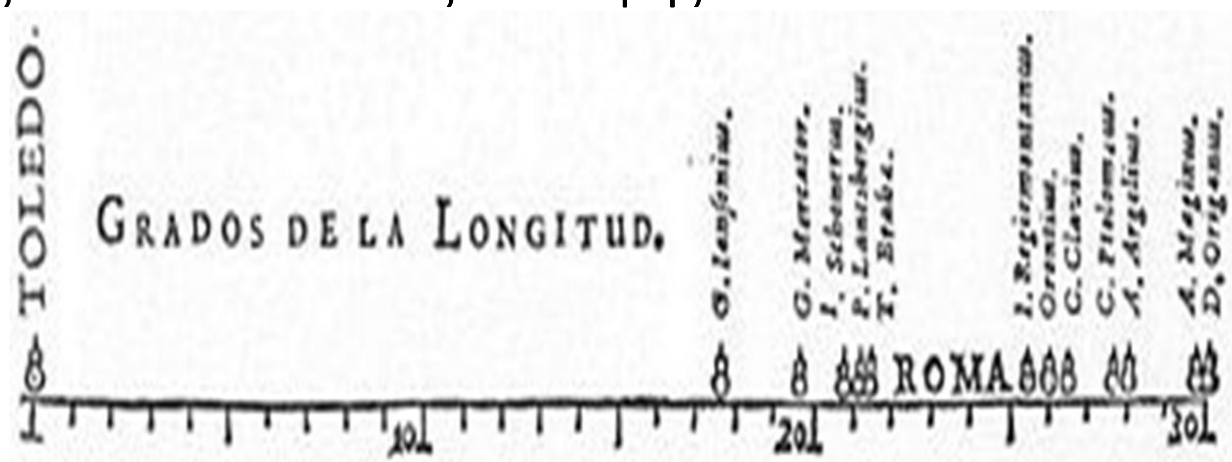
Εικόνα 14



Εικόνα 15

Toledo - Rome

1644 μ.Χ. O Michael van Langren, Ολλανδός αστρονόμος και χαρτογράφος, χαράσσει το πρώτο γνωστό **γράφημα στατιστικών δεδομένων** που δείχνει και το μέγεθος πιθανών σφαλμάτων. Αφορά διαφορετικούς εκτιμητές της απόστασης (γεωγραφικού μήκους) μεταξύ Τολέδο Ισπανίας και Ρώμης.



Εικόνα 16

Pascal - Fermat

1654 μ.Χ.

Ο Pascal και ο Fermat αλληλογραφούν για τον καταμερισμό των στοιχημάτων στα τυχερά παιχνίδια και μαζύ δημιουργούν τη μαθηματική θεωρία πιθανοτήτων.



Εικόνα 17

Huygens – Η λογική των τυχερών παιχνιδιών (1)

1657μ.Χ.

Το βιβλίο του Huygens με τίτλο 'Η λογική των τυχερών παιχνιδίων' (On Reasoning in Games of Chance) είναι το πρώτο βιβλίο στη θεωρία πιθανοτήτων. Ο Huygens εφεύρε επίσης και το ρολόϊ εκκρεμές.

Huygens – Η λογική των τυχερών παιχνιδιών (2)

1663 μ.Χ.
Ο άγγλος John Graunt , ένας απο τους πρώτους **δημογράφους** κατά επάγγελμα έμπορος ψιλικών, χρησιμοποιεί ενοριακά αρχεία για να εκτιμήσει τον πληθυσμό του Λονδίνου.

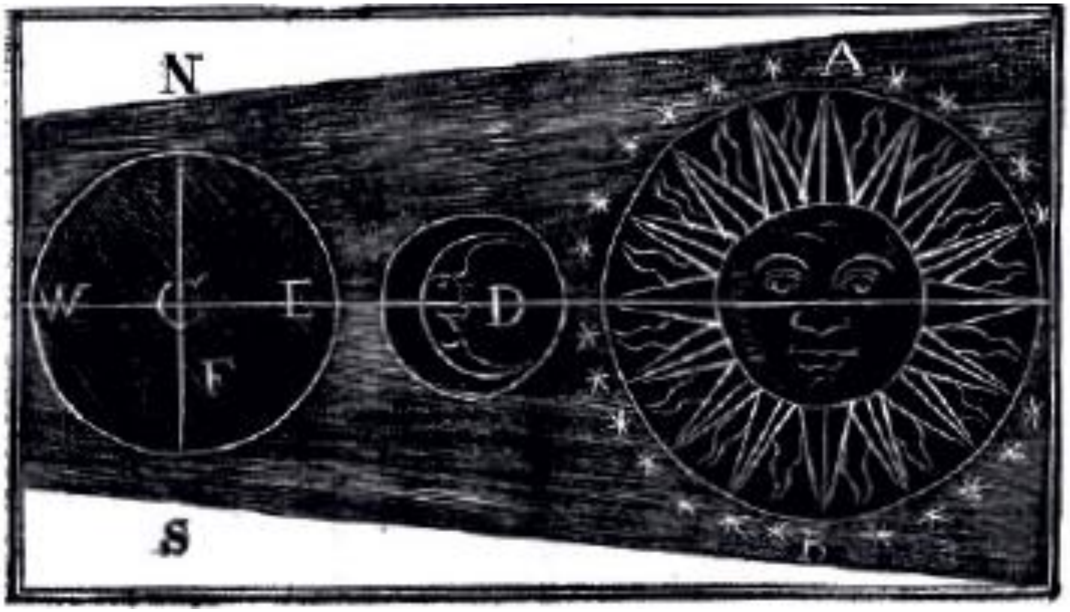


Εικόνα 18

Edmund Halley
Πίνακες θνησιμότητας

- **1693** O Edmund Halley, άγγλος αστρονόμος, γεωφυσικός, μαθηματικός, μετεωρολόγος, δημιουργεί τους πρώτους **πίνακες θνησιμότητας** που συνδέουν τους ρυθμούς θανάτου με την ηλικία – το θεμέλιο των ασφαλειών ζωής.

Edmund Halley



Εικόνα 19

Jacob Bernoulli

- **1713** O Jacob Bernoulli στο βιβλίο του με τίτλο ‘Ars conjectandi’ (The art of conjecturing) παρουσιάζει τον **Νόμο των Μεγάλων Αριθμών** – όσο πιό συχνά επαναλαμβάνεις ένα πείραμα τόσο πιο ακριβέστερα μπορείς να προβλέψεις το αποτέλεσμα.

Βολταίρος: Rigging the lottery

1728

Ο Βολταίρος και ο μαθηματικός φίλος του de la Condamine εντοπίζουν ότι μια λαχειοφόρος με ομόλογα στο Παρίσι αποδίδει, με διάφορα βραβεία και jackpots, περισσότερα κέρδη από το συνολικό κόστος των δελτίων. Επενδύουν στην αγορά, αγοράζουν δελτία και με απλά μαθηματικά και νόμιμα τεχνάσματα κερδίζουν μια περιουσία (βλ. How Voltaire made a fortune rigging the lottery in *To-day I found out*, London Business School).

Statistics

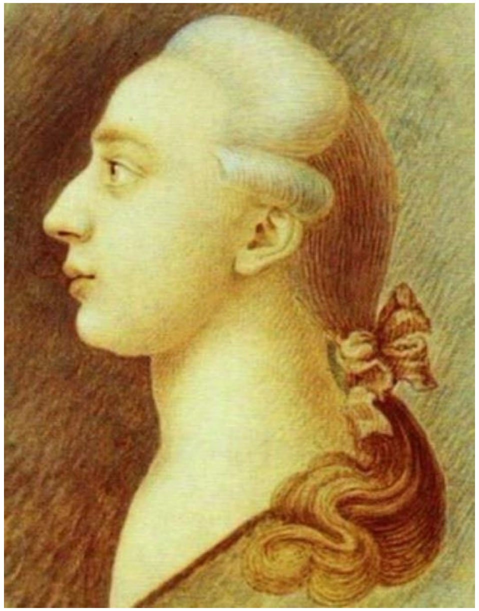
1749 μ.Χ.

Ο Gottfried Achenwall , Γερμανός φιλόσοφος, ιστορικός, οικονομολόγος , νομικός και στατιστικός, κατασκευάζει τη λέξη «**στατιστική» (statistics – statistik)** εννοώντας την πληροφορία που χρειάζεται για να λειτουργεί ένα κράτος (state).

Καζανόβα και κρατικά λαχεία

1757 μ.Χ.

Ο Καζανόβα γίνεται θεματοφύλακας (trustee) των Γαλλικων Κρατικών Λαχείων. Εικάζεται οτι συνέβαλε στην επινόηση και δημιουργία του συστήματος των λαχείων.



Εικόνα 20

Thomas Bayes

1761 μ.Χ.

Ο αιδεσιμότατος Thomas Bayes αποδεικνύει το **θεώρημα του Bayes** – τον ακρογωνιαίο λίθο της δεσμευμένης πιθανότητας και του ελέγχου πεποιθήσεων και υποθέσεων.

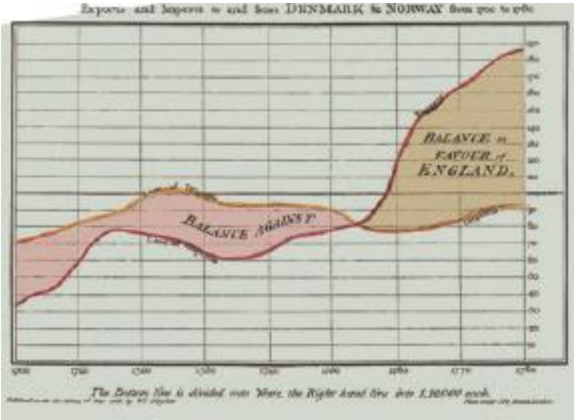


Εικόνα 21

William Playfair

1786 μ.Χ.

Ο William Playfair, μηχανικός και πολιτικός οικονομολόγος απο τη Σκωτία, εισάγαγει **γραφήματα και ραβδογράμματα** για να παρουσιάσει **οικονομικά δεδομένα.** Θεωρείται ως ο θεμελιωτής των γραφικων μεθόδων της στατιστικής.



Εικόνα 22

Gilbert White

1789 μ.Χ.

Ο Gilbert White και άλλοι ιερωμένοι- νατουραλιστές καταγράφουν – κρατούν αρχεία θερμοκρασιών, ημερομηνιών των πρώτων χιονοπτώσεων και εμφανίσεων κούκων, χελιδονιών κλπ.

Τα δεδομένα αυτά αποβαίνουν χρήσιμα αργότερα στη μελέτη των κλιματικών αλλαγών.

Πρώτη απογραφή στην Αμερική

1790 μ.Χ.

Η πρώτη απογραφή στις ΗΠΑ, η οποία έγινε με έφιππους απογραφείς σε 13 Πολιτείες και γειτονικές περιοχές και με εντολή του τρίτου Προέδρου των ΗΠΑ Thomas Jefferson, καταγράφει 3,9 εκατομμύρια Αμερικανών.

Η Στατιστική στα Αγγλικά

1791 μ.Χ.

Η πρώτη χρήση του όρου – λέξης “statistics” στα Αγγλικά απο τον Sir John Sinclair στις δημοσιεύσεις του με τίτλο «*Statistical Account of Scotland*» που περιγράφουν στατιστικά στοιχεία για τη ζωή στη Σκωτία.



Εικόνα 23
1754 -1835

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

1805 μ.Χ.

Ο Andrien – Marie Legendre, ο διάσημος μαθηματικός απο την Τουλούζη Γαλλίας, εισάγει τη **μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων** για την προσαρμογή μιας συνάρτησης – καμπύλης σε ένα δεδομένο σύνολο παρατηρήσεων.



Εικόνα 24
Legendre, Adrien-Marie (1752-1833)

Κανονική κατανομή

1808 μ.Χ.

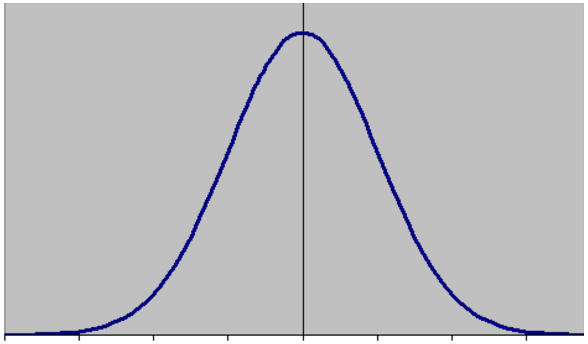
Ο Gauss, με συνεισφορές απο τον Laplace, παρουσιάζει (derives) την **κανονική κατανομή** που είναι τόσο θεμελιώδης στη Στατιστική και τη Θεωρία Πιθανοτήτων (μελέτη μεταβλητότητας και σφαλμάτων).



Εικόνα 25
1777–1855



Εικόνα 26
1749–1827



Εικόνα 27

Manchester Statistical Society

1833 μ.Χ.

- Η **British Association for the Advancement of Science** ιδρύει Τμήμα (section) Στατιστικής. Ο Thomas Malthus, γνωστός δημογράφος και πολιτικός οικονομολόγος ο οποίος μελέτησε και ανέλυσε την ανάπτυξη πληθυσμών και ο Charles Babbage στον οποίο αποδίδεται η ιδέα του προγραμματιζόμενου υπολογιστή, ήσαν μέλη. Αργότερα το Τμήμα αυτό έγινε η **Royal Statistical Society.**
- Ενα χρόνο πριν είχε ιδρυθεί η **Manchester Statistical Society** που υπάρχει ακόμη. **Εικόνα 28**

ROYAL STATISTICAL SOCIETY

Manchester Statistical Society

"For all who think about social and economic affairs"

Adolphe Quetelet

1835 μ.Χ.

Ο Βέλγος Adolphe Quetelet στο βιβλίο του *Πραγματεία επι του Ανθρώπου (Treatise on Man)* εισαγάγει την Κοινωνική Στατιστική ("social physics") και την έννοια του «**μέσου ανθρώπου**» – ως προς το ύψος, το δείκτη μάζας σώματος και τις αποδοχές, προσπαθώντας να ερμηνεύσει τους ρυθμούς θνησιμότητας, γάμων ή αυτοκτονιών κόντρα στην αντίληψη της ελεύθερης επιλογής.



Εικόνα 29

American Statistical Association

1839 μ.Χ.

Ιδρύεται η **American Statistical Association**. Οι Alexander Graham Bell, Andrew Carnegie και Martin Van Buren γίνονται μέλη της.

Εικόνα 30

Εικόνα 31

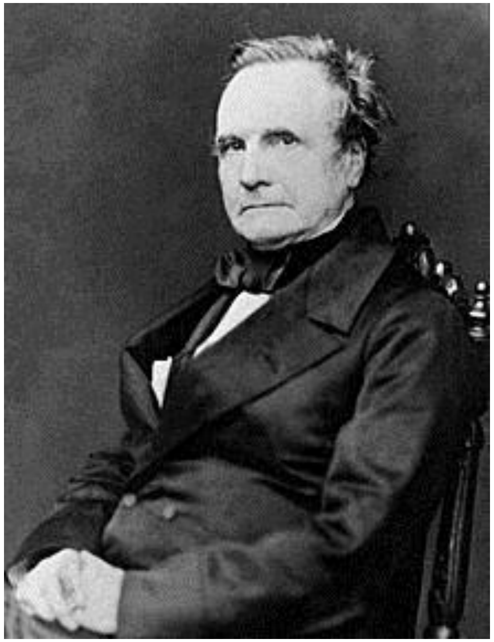
Η αρχή της ιατρικής στατιστικής

1840 μ.Χ.

Ο William Farr, Βρετανός επιδημιολόγος, εγκαθιδρύει το επίσημο σύστημα καταγραφής των αιτίων θανάτου στην Αγγλία και Ουαλία. Αυτό επιτρέπει την παρακολούθηση - - ιχνηλάτηση των επιδημιών και τη σύγκριση ασθενειών - είναι η αρχή της ιατρικής στατιστικής.

«μηχανή διαφορών» (difference engine)

1849 μ.Χ.
Ο Charles Babbage σχεδιάζει τη «μηχανή διαφορών» (difference engine) ενσωματώνοντας ιδέες χειρισμού δεδομένων και του σύγχρονου υπολογιστή.
Η μηχανή διαφορών πινακοποιεί πολυωνυμικές συναρτήσεις και το όνομα απορέει απο τη μέθοδο των διαφορών.



Εικόνα 32
Charles Babbage, (1791 –1871)

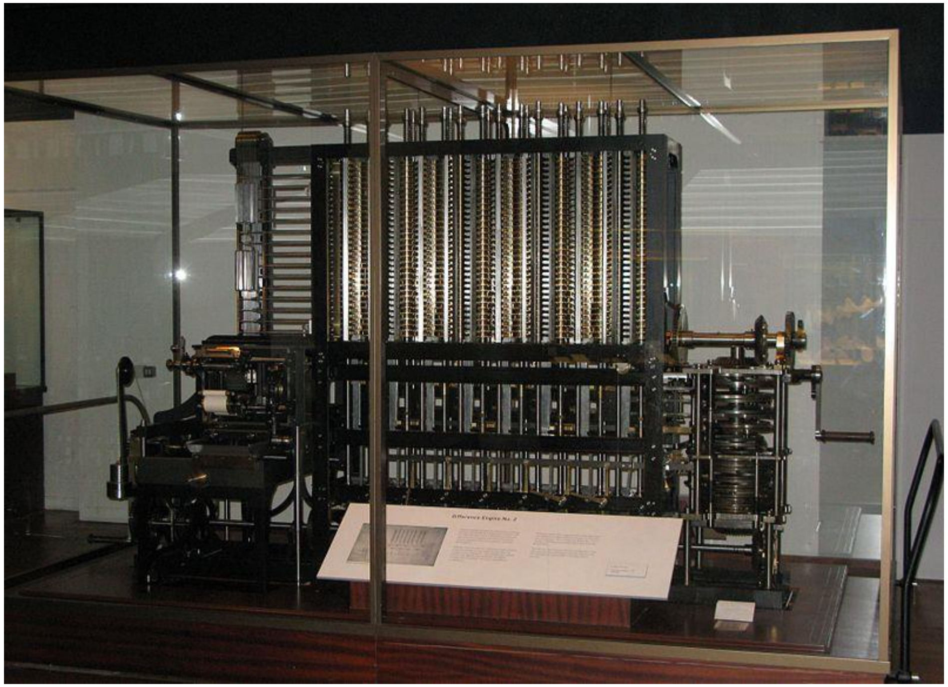
Ada Lovelace

1849 μ.Χ.
Η Ada Lovelace, ανηψιά του Λόρδου Βύρωνα, κόμισσα και μαθηματικός, γράφει το πρώτο πρόγραμμα Η/Υ για τη μηχανή.



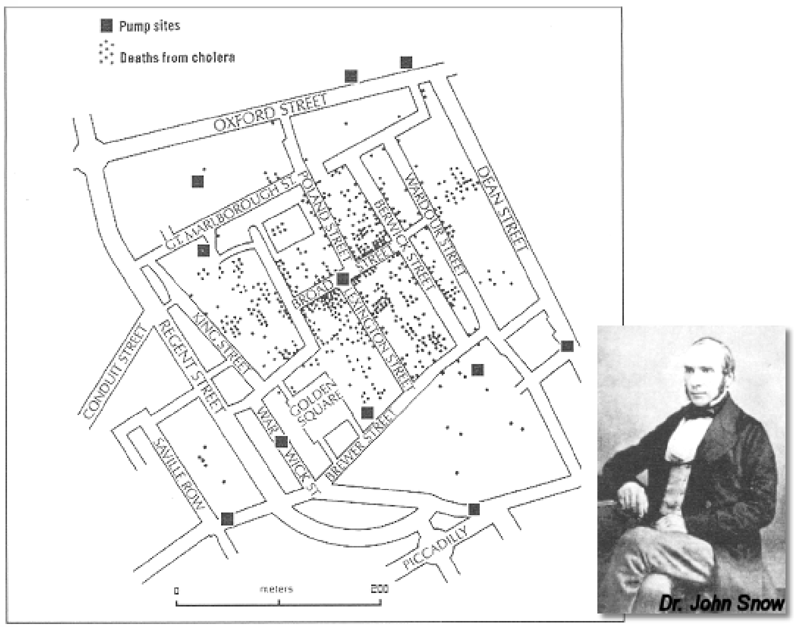
Εικόνα 33
Ada King, Countess of Lovelace, 1840

Babbage Difference Engine



Εικόνα 34

1854 μ.Χ. Ο «χάρτης της χολέρας» του John Snow



Εικόνα 35

John Snow, ιατρός, ένας από τους πατέρες της σύγχρονης επιδημιολογίας, εντόπισε την πηγή- κέντρο μετάδοσης της μόλυνσης σε μία αντλία νερού στην οδό Broad του Λονδίνου σηματοδοτώντας την αρχή των σύγχρονων επιδημιολογικών μελετών.

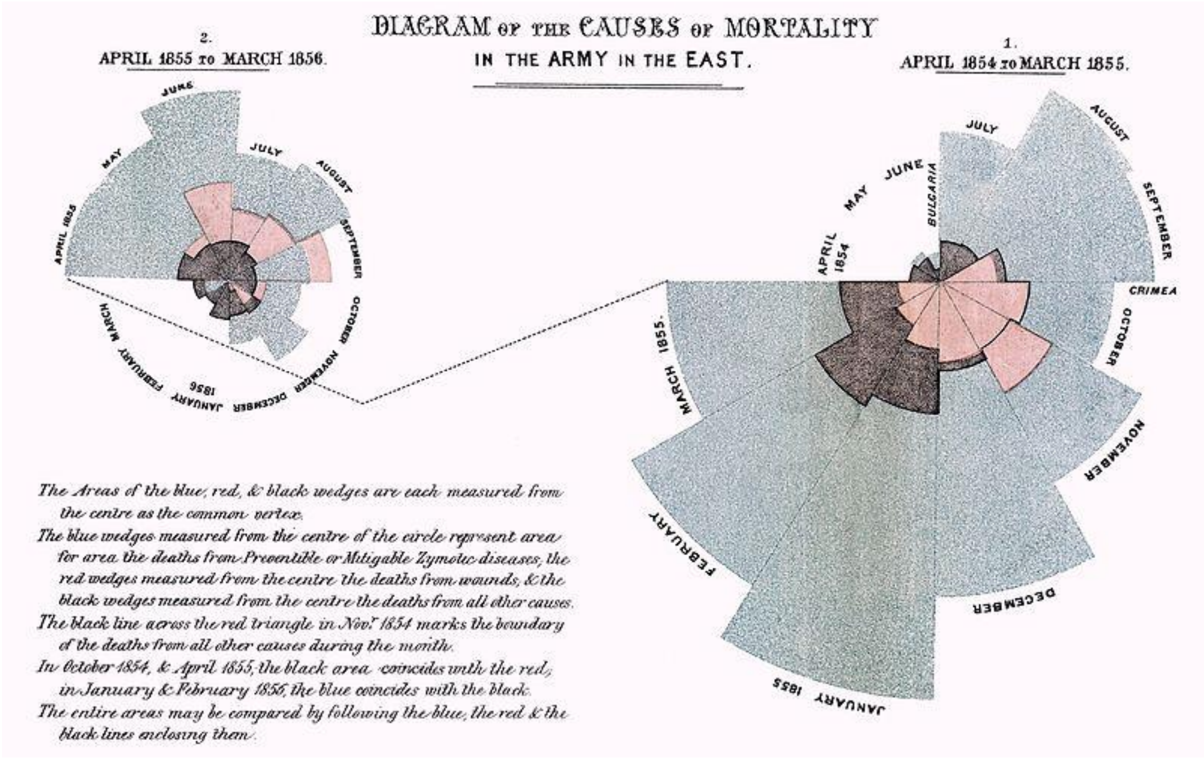
Florence Nightingale

- **1859 μ.χ.** Η Florence Nightingale χρησιμοποιεί στατιστικά των ατυχημάτων (θάνατοι κλπ) στον Πόλεμο της Κριμαίας για να επιρεάσει την κοινή γνώμη και το Υπουργείο Πολέμου της Αγγλίας. Δείχνει τα ατυχήματα ανά μήνα με ένα κυκλικό διάγραμμα που επινοεί, το 'τριαντάφυλλο της Nightingale', πρόδρομο του "**pie chart**". Εγινε η πρώτη γυναίκα μέλος της RSS και το πρώτο μέλος απο το εξωτερικό της ASA.



Εικόνα 36

το ‘τριαντάφυλλο της Nightingale’

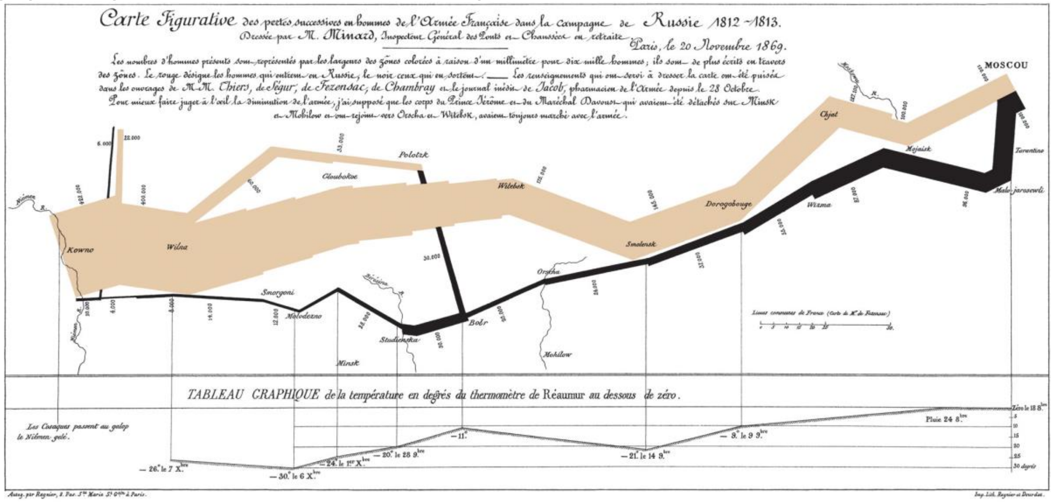


Εικόνα 37

Minard

1868 μ.Χ.

Ο Minard, Γάλλος πολιτικός μηχανικός, παρουσίασε ενα γραφικό διάγραμμα για την προέλαση του Ναπολέοντα προς τη Μόσχα (1812-1813). Το διάγραμμα παρουσιάζει την απόσταση που διανύθηκε, τον αριθμό των ανδρών που επιβίωναν σε κάθε χιλιόμετρο της πορείας, και τις θερμοκρασίες που αντιμετώπισαν.



Εικόνα 38

Παλινδρόμηση

1877

Ο Francis Galton, εξάδελφος του Δαρβίνου, περιγράφει την **παλινδρόμηση** προς τη μέση τιμή. Το 1888 παρουσιάζει την έννοια της συσχέτισης. Σε ενα διαγωνισμό στο Devon ‘Μάντεψε το βάρος του βοδιού’ περιγράφει τη ‘Σοφία του πλήθους’ – ότι δηλαδη ο μέσος πολλών (απληροφόρητων) εικασιών είναι κοντά στην αληθινή τιμή.



Εικόνα 39

Κοινωνική χαρτογραφία

1886 μ.Χ.

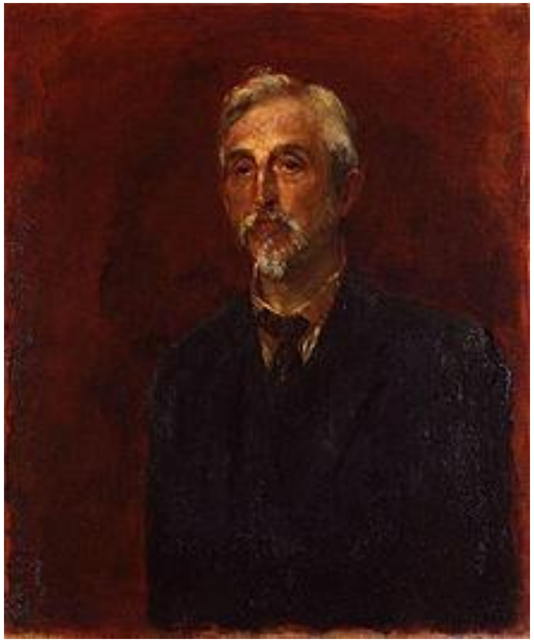
- Ο φιλανθρωπος επιχειρηματίας Charles Booth ξεκινά την απογραφή των πτωχών του Λονδίνου με αποτέλεσμα «τον χάρτη φτώχιας του Λονδίνου» με τις περιοχές και δρόμους του χρωματισμένες απο το μαύρο για τις πιο φτωχές και επικίνδυνες μέχρι το κίτρινο για τις άνω μέσης τάξης και πλούσιες. Το 1/3 των κατοίκων του Λονδίνου ζούσαν στη φτώχια.
- Από τα πρώτα δείγματα **κοινωνικής χαρτογραφίας**.

Charles Booth



Εικόνα 40

Part of Booth's map of Whitechapel 1889. The red areas are "well-to-do"; the black areas are "semi-criminal".



Εικόνα 41

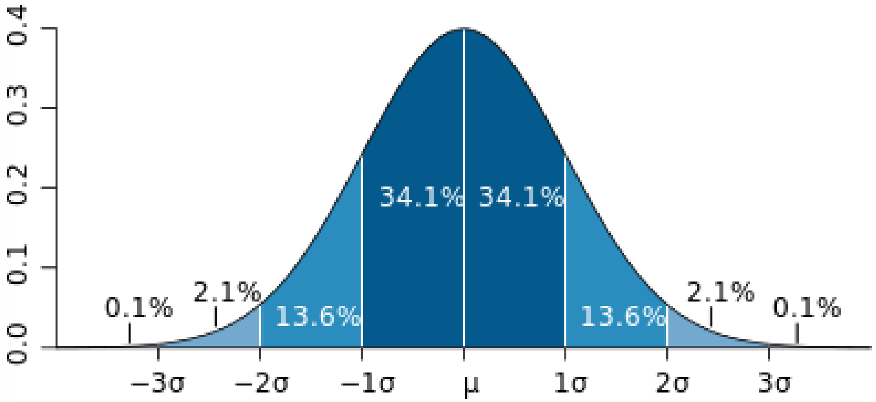
Charles Booth (philanthropist)

(1840 – 1916)

Karl Pearson

1894 μ.Χ.

- Ο Karl Pearson εισάγει τον όρο «**τυπική απόκλιση**». Αν τα σφάλματα ακολουθούν την κανονική κατανομή, 68% των δειγμάτων θα ευρίσκονται εντός μιάς τυπικής απόκλισης απο τη μέση τιμή. Αργότερα αναπτύσει τους **ελέγχους – τεστ χ^2** καλής προσαρμογής και ανεξαρτησίας.



Εικόνα 42



Karl Pearson
Εικόνα 43

Κτυπήματα αλόγων – Κατανομή Poisson

1898 μ.Χ.

Τα δεδομένα του Von Bortkiewicz, Πωλονογερμανός οικονομολόγος και στατιστικός και καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Strassburg, που αναφέρονται στους θανάτους στρατιωτών του Πρωσικού στρατού απο κτυπήματα αλόγων δείχνουν οτι σπάνια ενδεχόμενα ακολουθούν ένα προβλέψιμο υπόδειγμα, την ***κατανομή του Poisson***.

Εικόνα 44



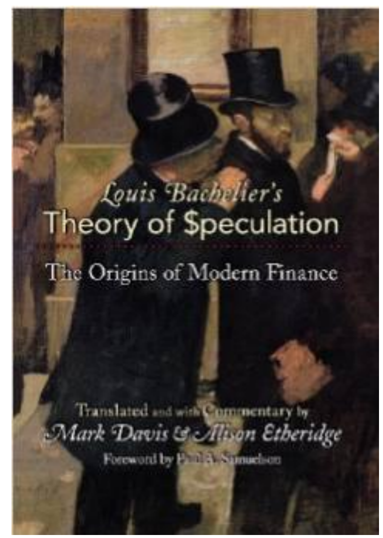
Η γέννηση των χρηματοοικονομικών μαθηματικών

1900 μ.Χ.

Ο Louis Bachelier, Γάλλος μαθηματικός, δείχνει οτι οι διακυμάνσεις των τιμών των μετοχών χρηματιστηρίου συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο όπως τα μόρια τυχαίας κίνησης Brown – είναι η αρχή των χρηματοοικονομικών μαθηματικών.



Εικόνα 45



Εικόνα 46

Student t-test

1908 μ.χ.

Ο William Sealy Gossett, χημικός και επικεφαλής ζυθοποιός της Guinness στο Δουβλίνο παρουσιάζει τον **έλεγχο t (t-test)** στο *Biometrika* του Karl Pearson. Χρησιμοποιεί μικρά δείγματα για να εξασφαλίσει οτι κάθε παραγωγή ζύθου έχει εξίσου καλή γεύση.



Εικόνα 47

Hollerith - IBM

1911 μ.χ.

Ο Herman Hollerith, εφευρέτης των διατρητικών μηχανών που χρησιμοποιούνταν για την ανάλυση δεδομένων απογραφών του US Census, συγχωνεύει την εταιρεία του για να ιδρύσει την IBM, τη γνωστή πρωτοποριακή εταιρεία μηχανών εμπορικών δεδομένων και των πρώτων υπολογιστών.

Hollerith Tabulator and Sorter Box

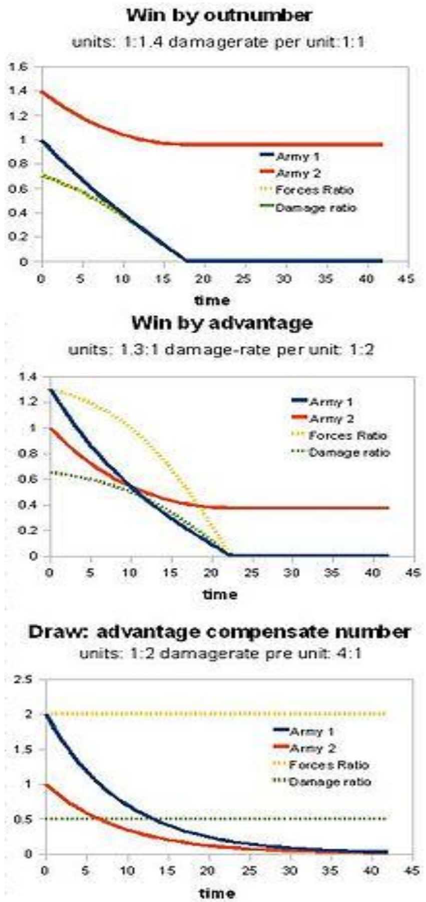


Εικόνα 48

1ος Παγκόσμιος Πόλεμος

1916 μ.χ. Κατά τη διάρκεια του Πρώτου Παγκόσμιου Πολέμου ο σχεδιαστής αυτοκινήτων Frederick Lanchester αναπτύσει στατιστικούς νόμους για την πρόβλεψη των εκβάσεων εναέριων μαχών: διπλασιάζοντας το μέγεθος τους, ο στρατός ξηράς γίνεται δυο φορές πιο ισχυρός, αλλά οι αεροπορικές δυνάμεις γίνονται τέσσερες φορές πιο ισχυρές.

Idealized simulation of two forces damaging each other neglecting all other circumstances than the 1) Size of army 2) Rate of damaging. The picture illustrates the principle of Lanchester's Square Law.

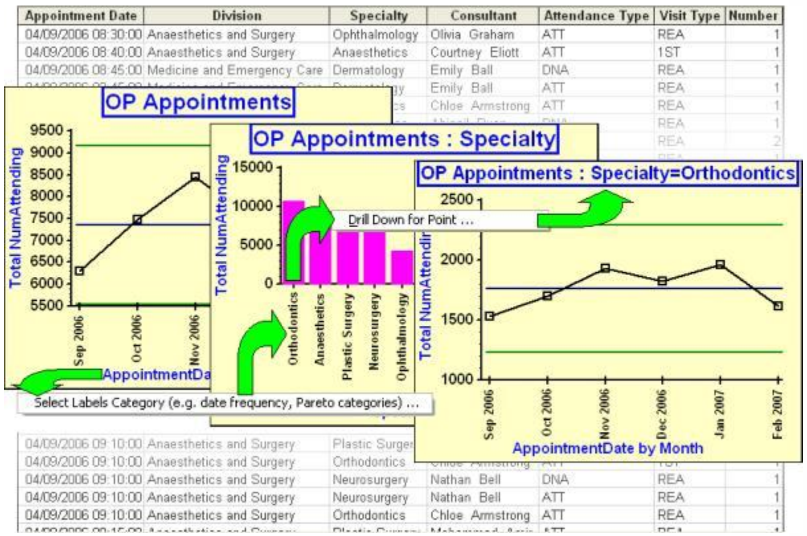


Εικόνα 49

Διάγραμμα ελέγχου

1924 μ.Χ.

Ο Walter Shewhart εφευρίσκει το **διάγραμμα ελέγχου** για να βοηθήσει τη βιομηχανική παραγωγή και διοίκηση



Εικόνα 50

R. A. Fisher

Το 1922 ο Fisher εισήγαγε στη Στατιστική την έννοια της **πιθανοφάνειας** και τους **εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας** που έχουν επικρατήσει μέχρι τα τελευταία χρόνια.
Το 1935 ο R.A. Fisher φέρνει επανάσταση στη σύγχρονη στατιστική. Το βιβλίο του *Designs of Experiments* δίνει τρόπους για να αποφασίζει ο ερευνητής ποιά αποτελέσματα επιστημονικών πειραμάτων είναι σημαντικά και ποιά δεν είναι.

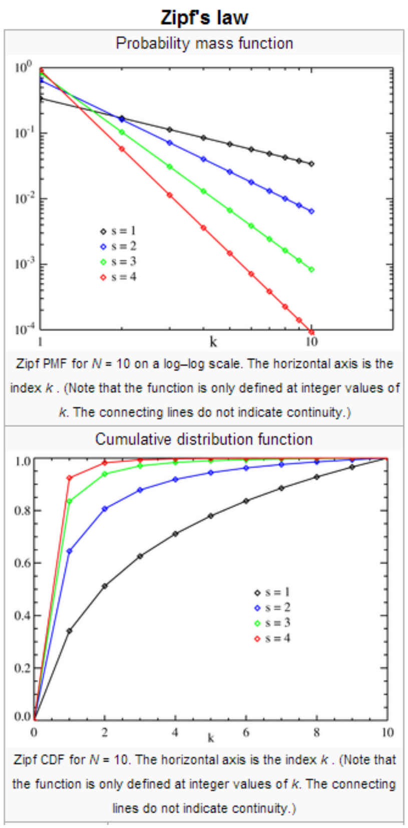


Εικόνα 51

Νόμος του Zipf

1935 μ.χ.

Ο George Zipf , Αμερικανός γλωσσολόγος και φιλόλογος βρίσκει οτι πολλά φαινόμενα, όπως μήκη ποταμών, πληθυσμοί πόλεων κλπ, ακολουθούν ενα κανόνα-νόμο δύναμης, που συνδέεται με την παρατήρηση οτι στη γλωσσολογία η πιό συχνή λέξη έχει περίπου δυο φορές μεγαλύτερη συχνότητα από τη δεύτερη πιο συχνή λέξη, τρείς φορές μεγαλύτερη συχνότητα απο την τρίτη πιο συχνή κλπ. Είναι η **κατανομή ή νόμος του Zipf**.



Zipf PMF for N = 10 on a log–log scale. The horizontal axis is the index k . (Note that the function is only defined at integer values of k. The connecting lines do not indicate continuity.)

Zipf CDF for N = 10. The horizontal axis is the index k . (Note that the function is only defined at integer values of k. The connecting lines do not indicate continuity.)

Εικόνα 52

Δυναμοκατανομές

Οι κατανομές Pareto και εν γένει οι δυναμοκατανομές (powerlow distributions) έχουν ανάλογη συμπεριφορά.

Neyman

1937 μ.χ.

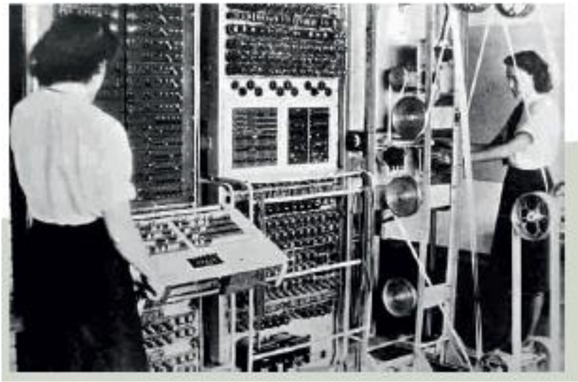
Ο Jerzy Neyman παρουσιάζει τα **διαστήματα εμπιστοσύνης** στη στατιστική συμπερασματολογία.

Ενα χρόνο πριν συνέβαλε και στη σύγχρονη επιστημονική δειγματοληψία [**δειγματοληψία με άνισες πιθανότητες, optimum allocation**].

Turing - Enigma

1940-45 μ.Χ.

Ο Alan Turing στο Πάρκο Bletchley, έξω απο το Λονδίνο, σπάει τον Γερμανικό πολεμικό κώδικα Enigma χρησιμοποιώντας προχωρημένη Μπευζιανή Στατιστική και τον Colossus, τον πρώτο προγραμματιζόμενο ηλεκτρονικό υπολογιστή.



Εικόνα 53

Το πρόβλημα των Γερμανικών αρμάτων μάχης (1)



Εικόνα 54

Το πρόβλημα των Γερμανικών αρμάτων μάχης (2)

1944 μ.Χ.

Το πρόβλημα των Γερμανικών αρμάτων μάχης: Οι σύμμαχοι έπρεπενα γνωρίζουν πόσα άρματα μάχης Panther θα αντιμετώπιζαν στη Γαλλία την ημέρα D-Day. Στατιστική ανάλυση των αριθμών μητρώου στα κιβώτια ταχυτήτων σε καταληφθέντα άρματα μάχης υποδηλώνει πόσα άρματα ανά κατηγορία παράγονται. Οι στατιστικοί προβλέπουν 270 το μήνα, ενω οι μυστικές υπηρεσίες προβλέπουν πολύ λιγώτερα. Τελικά η παραγωγή ήταν 276. Η Στατιστική νίκησε τους κατασκόπους.

Λογικά αξιώματα

1946 μ.χ.

Ο Richard Cox, Καθηγητής Φυσικής στο John Hopkins παράγει-εξάγει τους νόμους των πιθανοτήτων απο ένα σύνολο λογικών αξιωμάτων (Cox’s theorem).

Έκθεση Kinsey

1948-53 μ.Χ.

Η Εκθεση του Kinsey (Kinsey Report) στην Αμερική συλλέγει αντικειμενικά δεδομένα για την ανθρώπικη σεξουαλική συμπεριφορά. Μία μεγάλης κλίμακας δειγματοληπτική έρευνα 5000 ανδρών και, αργότερα, 5000 γυναικών προκαλεί θύελλα αντιδράσεων .

Κάπνισμα και καρκίνος πνευμόνων

1950 μ.Χ.
Οι Richard Doll και Bradford Hill παρουσιάζουν τη σχέση μεταξύ καπνίσματος και καρκίνου των πνευμόνων. Το 1954 θεμελιώνουν τη σχέση με άρθρο τους πέντε σελίδων στο BMJ, κατανοητό από όλους. Το ερωτηματολόγιο τους εστάλη σε 53000 γιατρούς. Παρά την οξύτατη και θυελλώδη αντίδραση, η σχέση γίνεται τελικά αποδεκτή οδηγώντας σε ενα τεράστιο όφελος για τη δημόσια υγεία. Ο Hill ήταν κορυφαίος βιοστατιστικός και ο Doll διάσημος ιατρός της Οξφόρδης και του MRC και οι δύο έγιναν Sir.
Ακόμη και ο R. A. Fisher, μέγας καπνιστής, δεν πείστηκε με την έρευνα.

Κάπνισμα και καρκίνος πνευμόνων



Εικόνα 55

Taguchi (1)

1950-60 μ.Χ.

Οι στατιστικές μέθοδοι του G. Taguchi για τη βελτίωση της ποιότητας εξαρτημάτων αυτοκινήτων και ηλεκτρονικών φέρνουν επανάσταση στην Ιαπωνική βιομηχανία, η οποία προσπερνά κατά πολύ δυτικούς Ευρωπαϊκούς αντιπάλους.

Taguchi (2)



Εικόνα 56

Kaplan - Meier

1958 μ.Χ.

Ο **εκτιμητής Kaplan-Meier** δίνει στους γιατρούς ενα απλό στατιστικό τρόπο για να κρίνουν ποιές θεραπευτικές αγωγές, φάρμακα κλπ αποδίδουν καλύτερα. Έχει σώσει εκατομμύρια ζωές.

Sir David Cox

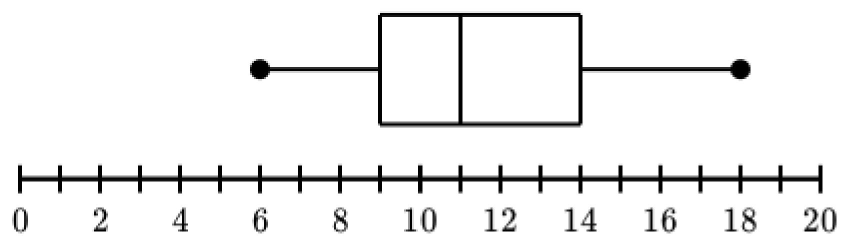
1972 μ.Χ.

Ο Sir David Cox παρουσιάζει το μοντέλο αναλογικού κινδύνου και την έννοια της μερικής πιθανοφάνειας.

Tukey

1977 μ.Χ.

Ο John Tukey εισαγάγει το θηκόγραμμα (διάγραμμα **box-plot** ή box-and-whisker) το οποίο παρουσιάζει τα τεταρτημόρια, διάμεσο και το εύρος των δεδομένων σε μια εικόνα.



Εικόνα 57

Efron

1979 μ.Χ.

Ο Bradley Efron εισάγει τη μέθοδο **bootstrap** που είναι ένας απλός τρόπος για να εκτιμήσει κανείς την κατανομή σχεδόν οποιουδήποτε δείγματος δεδομένων.

Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο

1981 Ιδρυση του ΕΣΙ

Visual display

1982 μ.Χ.

Ο Edward Tufte, καθηγητής στατιστικής, πολιτικής επιστήμης και πληροφορικής στο Παν/μιο Yale, εκδίδει το βιβλίο The Visual Display of Quantitative Information θέτοντας καινούργια πρότυπα στη γραφική απεικόνιση των δεδομένων.

R

1993 μ.Χ.

Εκδίδεται η στατιστική γλώσσα προγραμματισμού R η οποία σήμερα αποτελεί πρότυπο καθιερωμένο στατιστικό εργαλείο.

Big data

1997 μ.Χ.

Ο όρος ‘μεγάλα δεδομένα’ πρωτοεμφανίζεται στην επιστημονική βιβλιογραφία.

Ψηφιακή πληροφορία

2002 μ.Χ.

Η ποσότητα πληροφοριών που έχει αποθηκευθεί ψηφιακά υπερβαίνει τις μη-ψηφιακές πληροφορίες.

Moneyball

2002 μ.Χ.

Ο Paul DePodesta χρησιμοποιεί τη στατιστική για να μεταμορφώσει τις τύχες της ομάδας baseball Oakland Athletics. Η ιστορία έγινε το φιλμ *Moneyball*.



Εικόνα 58

Hal Varian της Google

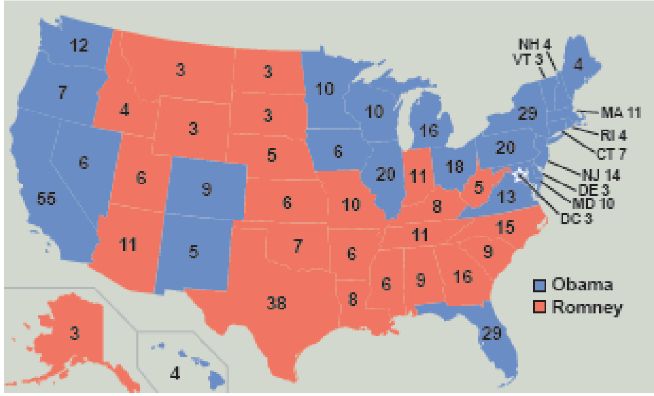
2008 μ.χ.

Ο Hal Varian, κορυφαίος οικονομολόγος της Google ισχυρίζεται ότι στα επόμενα 10 χρόνια η στατιστική θα είναι το πιο σέξυ επάγγελμα.

Nate Silver

2012 μ.Χ.

Ο Nate Silver, στατιστικός και επικοινωνιολόγος, προβλέπει επιτυχώς τα αποτελέσματα των προεδρικών εκλογών σε όλες τις 50 πολιτείες της Αμερικής. Γίνεται προσωπικότητα των ΜΜΕ.



Εικόνα 59

Σωματίδιο του Higgs

2012 μ.Χ.

Ο Μεγάλος Επιταχυντής Hardon του CERN επιβεβαιώνει την ύπαρξη του σωματιδίου του Higgs με πέντε τυπικές αποκλίσεις – περίπου με πιθανότητα μια στα 3.5 εκατομμύρια το τι βλέπουν να είναι σύμπτωση.

Βιβλιογραφία (1)

- Champkin,J.(2013), Timeline of statistics, *Significance*, Dec 2013, vol. 10, 21-27.
- Google.
- 1950 Richard Doll και Bradford Hill (κάπνισμα και καρκίνος των πνευμόνων).
- 1950s Genichi Taguchi (έλεγχος ποιότητας).
- 1958 Kaplan Meier (εκτιμητής επιβίωσης).
- 1972 David Cox (μοντέλο αναλογικών κινδύνων και μερική πιθανοφάνεια).
- 1977 John Tukey (box-plot και άλλα).

Βιβλιογραφία (2)

- 1979 Bradley Efron (bootstrap).
- 1982 Edward Tufte (*The Visual Display of Quantitative Information.*
- 1993 Γλώσσα R.
- 1997 Big Data.
- 2002 The amount of information stored digitally surpasses non-digital.
- 2008 Hal Varian – Google: statistics the sexy profession.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/13)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** http://olympia.gr/2014/02/11/%CE%BF-%CE%BF%CF%80%CE%BB%CE%AF%CF%84%CE%B7%CF%82-%CE%B4%CF%81%CF%8C%CE%BC%CE%BF%CF%82-%CE%BF%CF%80%CE%BB%CE%B9%CF%84%CE%BF%CE%B4%CF%81%CE%BF%CE%BC%CE%AF%CE%B1/
- **Εικόνα 2, 3:** http://www.tripadvisor.co.uk/LocationPhotoDirectLink-g187151-d546268-i113425389-Carcassonne_Medieval_City-Carcassonne_Aude_Languedoc_Roussillon.html
- **Εικόνα 4:** http://www.indianetzone.com/38/anushashana_parva.htm
- **Εικόνα 5:** http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/161029/161029,1226051748,7/stock-photo-holy-night-way-to-bethlehem-vector-illustration-20123170.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/13)

- **Εικόνα 6:** https://www.holidayme.com/Beijing-tourism-CT222
- **Εικόνα 7:** http://www.wikiwand.com/en/Cryptography
- **Εικόνα 8:** "M-T-Cicero" by original: Gunnar Bach Pedersen; for that version: Louis le Grand - Image:Thorvaldsen Cicero.jpg. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M-T-Cicero.jpg#/media/File:M-T-Cicero.jpg
- **Εικόνα 9:** "Domesday-book-1804x972" by Andrews, William - Andrews, William: "Historic Byways and Highways of Old England" (1900)[2]. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Domesday-book-1804x972.jpg#/media/File:Domesday-book-1804x972.jpg
- **Εικόνα 10:** http://www.taringa.net/posts/info/16599555/5-Descubrimientos-que-desmienten-la-historia.html

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/13)

- **Εικόνα 11:** "Yanghui triangle" by Yáng Huī (楊輝), ca. 1238–1298) - [1]. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yanghui_triangle.gif#/media/File:Yanghui_triangle.gif
- **Εικόνα 12:** "Cardano" by Gerolamo Cardano (1501-1576) - http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Cardano.jpg (de:Benutzer:ChristianGruchow). Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cardano.jpg#/media/File:Cardano.jpg
- **Εικόνα 13:** http://www.cs.uofs.edu/~mccloske/courses/cmps144/spring12.dir/prog2_s12.html
- **Εικόνα 14:** "Tycho Brahe" από τον Eduard Ender († 1883) -

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/13)

http://cache.eb.com/eb/image?id=83677&rendTypeId=4. Υπό την άδεια Κοινό Κτήμα μέσω Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tycho_Brahe.JPG#/media/File:Tycho_Brahe.JPG

- **Εικόνα 15:** http://www.brighthub.com/science/space/articles/47944.aspx#imgn_2
- **Εικόνα 16:** https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AGrados_de_la_Longitud.jpg By Michaël Florent van Langren (Langrenus) [Public domain], via Wikimedia Commons
- **Εικόνα 17:** http://www.wikiart.org/en/david-teniers-the-younger/figures-gambling-in-a-tavern-1670
- **Εικόνα 18:** http://www.halloweenexperts.com/wp-content/uploads/2013/09/old-cemetery.jpg
- **Εικόνα 19**: https://timemarcheson.files.wordpress.com/2013/05/eclipse.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (5/13)

- **Εικόνα 20:** "Casanova ritratto" by Francesco Giuseppe Casanova - Adriano C. from en: wikipedia. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Casanova_ritratto.jpg#/media/File:Casanova_ritratto.jpg
- **Εικόνα 21:** "Thomas Bayes" by unknown - [2][3]. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thomas_Bayes.gif#/media/File:Thomas_Bayes.gif
- **Εικόνα 22:** "Playfair TimeSeries-2" by William Playfair - Derivative of File:Playfair TimeSeries.png William Playfair's Time Series of Exports and Imports of Denmark and Norway. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Playfair_TimeSeries-2.png#/media/File:Playfair_TimeSeries-2.png

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (6/13)

- **Εικόνα 23:** https://www.peintures-tableaux.com/Portrait-of-Sir-John-Sinclair-%C3%A9cossais-peintre-Henry-Raeburn.html
- **Εικόνα 24:** http://www.wikigallery.org/wiki/painting_226918/Francois-Seraphin-Delpech/Portrait-of-Adrien-Marie-LeGendre-1752-1833-French-mathematician
- **Εικόνα 25:** "Carl Friedrich Gauss" από τον Gottlieb BiermannA. Wittmann (photo) - Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V. (Foto: A. Wittmann).. Υπό την άδεια Κοινό Κτήμα μέσω Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg#/media/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg
- **Εικόνα 26:** "Pierre-Simon, marquis de Laplace (1745-1827) - Guérin" by Jean-Baptiste Paulin Guérin - http://www.photo.rmn.fr/. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre-Simon,_marquis_de_Laplace_(1745-1827)_-_Gu%C3%A9rin.jpg#/media/File:Pierre-Simon,_marquis_de_Laplace_(1745-1827)_-_Gu%C3%A9rin.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (7/13)

- **Εικόνα 27:** http://www.technologyinvestor.com/wp-content/uploads/2011/08/normal21.gif
- **Εικόνα 28:** http://www.rss.org.uk/ and http://www.manstatsoc.org/
- **Εικόνα 29:** "Adolphe Quételet by Joseph-Arnold Demannez" by Joseph-Arnold Demannez - This image is available from the United States Library of Congress's Prints and Photographs division under the digital ID cph.3b11632.This tag does not indicate the copyright status of the attached work. A normal copyright tag is still required. See Commons:Licensing for more information. | العربيةčeština | Deutsch | English | español | | فارسیsuomi | français | magyar | italiano | македонски | മലയാളം | Nederlands | polski | português | русский | slovenčina | slovenščina | Türkçe | українська | 中文 | 中文（简体） | 中文（繁體） | +/−. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Adolphe_Qu%C3%A9telet_by_Joseph-Arnold_Demannez.jpg#/media/File:Adolphe_Qu%C3%A9telet_by_Joseph-Arnold_Demannez.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (8/13)

- **Εικόνα 30:** http://www.amstat.org/
- **Εικόνα 31:** http://www.amstat.org/asa175/index.cfm
- **Εικόνα 32:** "Charles Babbage - 1860" by Unknown - http://images.google.com/hosted/life/l?q=Charles+Babbage&prev=/search%3Fq%3DCharles%2BBabbage%26um%3D1%26hl%3Den%26sa%3DX%26biw%3D1680%26bih%3D916%26tbs%3Disz:l%26tbm%3Disch&imgurl=19fc9fba4ea4a1cb. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Charles_Babbage_-_1860.jpg#/media/File:Charles_Babbage_-_1860.jpg
- **Εικόνα 33:** http://www.wikiwand.com/en/Ada_Lovelace
- **Εικόνα 34:** https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%86%CE%BF%CF%81%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%BC%CE%B7%CF%87%CE%B1%CE%BD%CE%AE

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (9/13)

- **Εικόνα 35:** http://healthcybermap.org/HGeo/pg1_1.htm
- **Εικόνα 36:** https://www.pinterest.com/pin/117304765269561574/
- **Εικόνα 37:** https://www.pinterest.com/pin/214765475950617404/
- **Εικόνα 38:** "Minard" by Charles Minard (1781-1870) - see upload log. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Minard.png#/media/File:Minard.png
- **Εικόνα 39:** http://www.thecrimson.com/article/2014/10/21/help-me-name-my-thesis/
- **Εικόνα 40:** "Booth map of Whitechapel" by Charles Booth - http://www.umich.edu/~risotto/maxzooms/ne/nej56.html (cropped). Original: Charles Booth's Labour and Life of the People. Volume 1: East London (London: Macmillan, 1889).. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Booth_map_of_Whitechapel.jpg#/media/File:Booth_map_of_Whitechapel.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (10/13)

- **Εικόνα 41:** "Charles Booth by George Frederic Watts" by George Frederic Watts - National Portrait Gallery: NPG 4131While Commons policy accepts the use of this media, one or more third parties have made copyright claims against Wikimedia Commons in relation to the work from which this is sourced or a purely mechanical reproduction thereof. This may be due to recognition of the "sweat of the brow" doctrine, allowing works to be eligible for protection through skill and labour, and not purely by originality as is the case in the United States (where this website is hosted). These claims may or may not be valid in all jurisdictions.As such, use of this image in the jurisdiction of the claimant or other countries may be regarded as copyright infringement. Please see Commons:When to use the PD-Art tag for more information.See User:Dcoetzee/NPG legal threat for more information.This tag does not indicate the copyright status of the attached work. A normal copyright tag is still required. See Commons:Licensing for more information.English | Español | Français | Magyar | Italiano | Македонски | Türkmençe | +/−. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Charles_Booth_by_George_Frederic_Watts.jpg#/media/File:Charles_Booth_by_George_Frederic_Watts.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (11/13)

- **Εικόνα 42:** https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_deviation_diagram_micro.svg
- **Εικόνα 43:** http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/Figures.htm#pea
- **Εικόνα 44:** „Parade 1894" von Carl Röchling - de:Bild:Parade 1894.JPG & [1]. Lizenziert unter Gemeinfrei über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parade_1894.JPG#/media/File:Parade_1894.JPG
- **Εικόνα 45:** http://www.energybrainpool.com/analyse.html
- **Εικόνα 46:** http://img2.gettextbooks.com/pi/0691117527/500/500
- **Εικόνα 47:** http://www.comicvine.com/images/1300-4551671
- **Εικόνα 48:** https://www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/attic/attic_room.html
- **Εικόνα 49:** http://cdn4.static.ovimg.com/m/03n117/?width=150

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (12/13)

- **Εικόνα 50:** http://www.prismeurope.co.uk/software/winchart_professional.php
- **Εικόνα 51:** http://www.dcscience.net/fisher-2s.jpg
- **Εικόνα 52:** https://en.wikipedia.org/wiki/Zipf%27s_law
- **Εικόνα 53:** http://www.boerner.net/jboerner/?cat=22&paged=26
- **Εικόνα 54:** "Bundesarchiv Bild 101I-783-0110-12, Nordafrika, Panzer II, Kraftfahrzeuge" by Bundesarchiv, Bild 101I-783-0110-12 / Dörner / CC-BY-SA. Licensed under CC BY-SA 3.0 de via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bundesarchiv_Bild_101I-783-0110-12,_Nordafrika,_Panzer_II,_Kraftfahrzeuge.jpg#/media/File:Bundesarchiv_Bild_101I-783-0110-12,_Nordafrika,_Panzer_II,_Kraftfahrzeuge.jpg
- **Εικόνα 55:** http://www.onlymyhealth.com/imported/images/2013/July/02_Jul_2013/A-packet-of-cigarettes-300x450.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (13/13)

- **Εικόνα 56:** http://us.123rf.com/450wm/rainerplendl/rainerplendl1012/rainerplendl101200001/8406198-unfinished-automobiles-in-a-car-plant.jpg
- **Εικόνα 57:** https://ka-perseus-graphie.s3.amazonaws.com/d37eb304954fb4e509cfce32eb54bbae8fac9eef.png
- **Εικόνα 58:** http://blogs.lawyers.com/wp-content/uploads/2012/09/Little-League-batter-300.jpg
- **Εικόνα 59:** https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ElectoralCollege2012.svg

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 12: Τα 23 προβλήματα του Hilbert (Π. Κουλακίδου)

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τα 23 προβλήματα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

- Η περιγραφή των 23 προβλημάτων που έθεσε ο Hilbert στην αρχή του 20ου αιώνα και που επηρέασαν βαθιά την εξέλιξη των μαθηματικών καθώς και μνεία των λύσεων.

Τα 23 Προβλήματα του Hilbert

Κουλακίδου Π.

Ιστορία των Μαθηματικών

Υπεύθυνη Καθηγήτρια: Χ. Χαραλάμπους

Εισαγωγή

David Hilbert (1862 Konigsberg- 1943 Gottingen). Διδακτορικό το 1885 υπό την επίβλεψη του Ferdinand von Lindemann με τίτλο "Uber invariante Eigenschaften spezieller binarer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen". Έγινε το 1895 καθηγητής στο Gottingen. Από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς με συμβολή σε:

- Άλγεβρα, αναλλοίωτοι (1885-1893)
- Αλγεβρική Θεωρία αριθμών (1893-1898)
- Γεωμετρία (1898-1902)
- Ανάλυση (1902-1912)
- Μαθηματική Φυσική (1910-1922)
- Θεμελίωση των Μαθηματικών (1918-1930)



Εικόνα 1

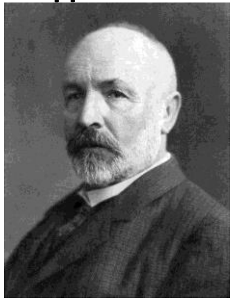
Διάλεξη στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900, όπου και εξέθεσε μία λίστα με 23 προβλήματα που αφορούσαν πολλούς κλάδους των Μαθηματικών.

1^o Πρόβλημα: Η υπόθεση του συνεχούς (1)

Δύο σύνολα λέμε ότι έχουν τον ίδιο πληθάριθμο αν μπορούμε να φέρουμε σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία τα στοιχεία του ενός συνόλου με αυτά του άλλου συνόλου. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει κάποιο σύνολο με πληθάριθμο (αυστηρά) μεγαλύτερο από του $\mathbb{N}$, δηλαδή $\aleph_0$ και (αυστηρά) μικρότερο από του $\mathbb{R}$, δηλαδή $2^{\aleph_0}$. Ήταν γνωστό ότι $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ αλλά όχι αν υπάρχει ενδιάμεσος πληθάριθμος. Ο Cantor (1845-1918) έθεσε πρώτος αυτή την ερώτηση και προσπάθησε για πολλά χρόνια να την αποδείξει χωρίς επιτυχία. Η απάντηση ήρθε από δύο πλευρές. Το 1940 ο Kurt Godel (1906-1978) απέδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι λανθασμένη από τη θεωρία συνόλων των ZF των Zermelo-Fraenkel ακόμη κι αν συμπεριλάβουμε στη θεωρία το αξίωμα της επιλογής ZFC.

1ο Πρόβλημα: Η υπόθεση του συνεχούς (2)

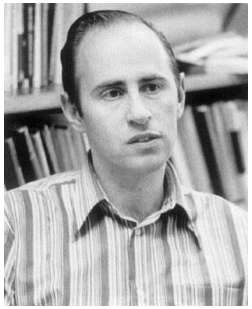
Το 1963 ο Paul Cohen (1934-2007) έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς δε μπορεί να αποδειχθεί στη θεωρία ZFC και βραβεύτηκε γι'αυτό με το βραβείο Fields. Τα δύο αποτελέσματα συνεπάγονται ότι η υπόθεση του συνεχούς δε μπορεί να αποδειχθεί ούτε σωστή ούτε λανθασμένη στα πλαίσια της θεωρίας ZFC. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα βασίζονται στην υπόθεση ότι τα αξιώματα Zermelo-Fraenkel είναι συνεπή, δηλαδή ότι δεν οδηγούν σε αντιφάσεις.



Εικόνα 2



Εικόνα 3



Εικόνα 4

2ο Πρόβλημα: Η συνέπεια των αριθμητικών αξιωμάτων (1)

Το δεύτερο πρόβλημα είναι και αυτό στα πλαίσια της θεωρίας συνόλων. Το ερώτημα που τέθηκε είναι αν κάποια από τα αξιώματα της αριθμητικής του Peano προκύπτουν από άλλα. Ο Hilbert ζήτησε να αποδειχθεί ότι τα αξιώματα δεν είναι αντιφατικά, δηλαδή σε πεπερασμένο πλήθος λογικών βημάτων να μη μπορεί να οδηγηθεί κανείς σε αντίφαση υποθέτοντας κάποια από τα αξιώματα. Σε «δυνατά» μαθηματικά συστήματα, όπως αυτό των Zermelo-Fraenkel η ερώτηση απαντάται θετικά, πράγμα που δε δίνει όμως λύση στο ερώτημα του Hilbert καθώς αναφέρεται σε εσωτερικές αντιφάσεις του συστήματος. Το πρόβλημα δε θεωρείται ότι έχει λυθεί πλήρως, ωστόσο οι πιο γενικά αποδεκτές απαντήσεις στο ζήτημα προέρχονται από τους Godel και Gentzen. Ο Godel με το δεύτερο θεώρημα της μη πληρότητας έδειξε το 1931 ότι δε μπορεί να υπάρχει απόδειξη για την συνέπεια της Peano αριθμητικής μέσα στο ίδιο το σύστημα των αξιωμάτων του Peano.

2ο Πρόβλημα: Η συνέπεια των αριθμητικών αξιωμάτων (2)

Από την άλλη, ο Gerhard Gentzen (1909-1945) δημοσίευσε το 1936 μία απόδειξη για τη συνέπεια της Peano αριθμητικής. Το αποτέλεσμα του λέει πως η απόδειξη της συνέπειας μπορεί να είναι δυνατή σε ένα σύστημα που είναι πολύ πιο αδύναμο από τη θεωρία συνόλων. Ο Gentzen όρισε για κάθε (διαφορετική) απόδειξη της Peano αριθμητικής ένα διατακτικό αριθμό ανάλογα με τη δομή της απόδειξης με κάθε διατακτικό να είναι μικρότερος του $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot}}} = sup\{\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots\}$ όπου ω ο μικρότερος άπειρος διατακτικός. Έπειτα, με υπερπεπερασμένη επαγωγή πάνω σε αυτούς τους διατακτικούς (γενίκευση της γνωστής επαγωγής των φυσικών αριθμών) κατάληξε στο συμπέρασμα ότι καμία απόδειξη δε μπορεί να οδηγήσει σε αντίφαση. Έτσι, σύμφωνα με το Gentzen μία θεωρία δε μπορεί να αποδείξει τη συνέπεια μιας άλλης θεωρίας που έχει μεγαλύτερο διατακτικό στις αποδείξεις της. Ακόμα και σήμερα οι μαθηματικοί δεν έχουν καταλήξει σε μία κοινά αποδεκτή λύση του προβλήματος.

$8^{ο}$ Πρόβλημα: Υπόθεση του Riemann και άλλα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών (1)

Το πρόβλημα αυτό είναι ίσως το πιο γνωστό από τη λίστα και παραμένει μέχρι και σήμερα άλυτο. Ένα ερώτημα του είναι αν αληθεύει η υπόθεση του Georg F. B. Riemann (1826-1866), δηλαδή αν το πραγματικό μέρος των μη τετριμμένων ριζών της συνάρτησης

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

του Riemann είναι $\frac{1}{2}$. Η υπόθεση του Riemann αν λυθεί θα δώσει απαντήσεις στο πρόβλημα της κατανομής των πρώτων αριθμών, γι’αυτό και θεωρείται από τα πιο σημαντικά ερωτήματα στην ιστορία των Μαθηματικών.

Εικόνα 5



$8^{ο}$ Πρόβλημα: Υπόθεση του Riemann και άλλα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών (2)

Τα άλλα ερωτήματα που συμπεριέλαβε ο Hilbert είναι η εικασία του Goldbach, δηλαδή ότι κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων και η εικασία των διδύμων πρώτων αριθμών, δηλαδή ότι υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι. Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την απόδειξη τους και έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι και ηλεκτρονικοί υπολογιστές μήπως και βρεθούν αντιπαραδείγματα αλλά δεν έχει δοθεί η απάντηση μέχρι και σήμερα.

Εικόνα 6



9ο Πρόβλημα: Γενίκευση του νόμου αντιστροφής για οποιοδήποτε αλγεβρικό σώμα αριθμών

Στα τέλη του 18ου αιώνα ο Gauss είχε αποδείξει το νόμο τετραγωνικής αντιστροφής που αναφερόταν σε ακεραίους: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο του Legendre ορίζεται ως:

$$\left(\frac{a}{q}\right) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ a\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{o}\ \upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi o\ modulo\ p\ \kappa\alpha\iota\ a \not\equiv 0(mod p) \\ -1 & \alpha\nu\ a\ \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{o}\ \upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi o\ modulo\ p \\ 0 & \alpha\nu\ a \equiv 0(mod p) \end{cases}$$

Ο Hilbert ζήτησε από τη μαθηματική κοινότητα να γενικεύσει αυτό το νόμο στην περίπτωση που δουλεύουμε σε τυχαίο αλγεβρικό σώμα αριθμών, δηλαδή πεπερασμένη (⇒αλγεβρική) επέκταση του $\mathbb{Q}$. Το πρόβλημα λύθηκε εν μέρει από τον Emil Artin (1898-1962) σε σειρά δημοσιεύσεων (1924, 1927, 1930)



Εικόνα 7

10ο Πρόβλημα: Επίλυση διοφαντικής εξίσωσης

Μία διοφαντική εξίσωση είναι μία πολυωνυμική εξίσωση για την οποία μας ενδιαφέρουν μόνο οι ακέραιες λύσεις. Η πιο διάσημη ίσως διοφαντική εξίσωση είναι η $x^n + y^n = z^n$, η οποία για $n = 2$ έχει ως λύση τις πυθαγόρειες τριάδες, ενώ για n ακέραιο μεγαλύτερο του 2 δεν έχει καμία ακέραια λύση. Οι διοφαντικές εξισώσεις γενικά είναι πολύ δύσκολο να λυθούν. Το ερώτημα που έθεσε ο Hilbert είναι αν μας δοθεί μια διοφαντική εξίσωση με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών αν μπορούμε να βρούμε ένα αλγόριθμο-διαδικασία που να προσδιορίζει σε πεπερασμένο πλήθος βήματα εάν η εξίσωση έχει λύση. Ένα σημαντκό βήμα για να δοθεί η απάντηση έγινε το 1936 από τους Church και Turing, οι οποίοι έβαλαν τα θεμέλια της θεωρίας αλγορίθμων. Η οριστική απάντηση δόθηκε το 1970 από τον Yuri Matiyasevitch ο οποίος βασιζόμενος στο έργο των Martin Davis, Julia Robinson και Hilary Putnam απέδειξε ότι είναι αδύνατη η κατασκευή ενός τέτοιου αλγορίθμου.

18ο Πρόβλημα: Τρία προβλήματα Τοπολογίας και Γεωμετρίας (1)

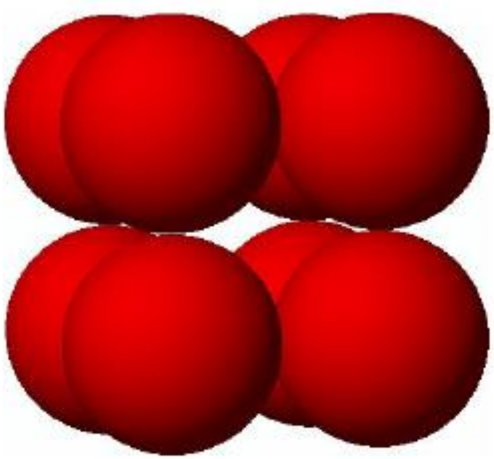
- Υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους διαφορετικές space groups. Δηλαδή υποομάδες της ομάδας των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$ με συμπαγή fundamental domain (δοθέντος τοπολογικού χώρου και ομάδας που δρα πάνω του, οι εικόνες ενός σημείου μέσω της δράσης σχηματίζουν τροχιά. Fundamental domain είναι ένα υποσύνολο του χώρου που περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε μία από τις τροχιές-γεωμετρική αναπαράσταση ενός συνόλου αντιπροσώπων των τροχιών). Ο L. Bieberbach έδωσε θετική απάντηση στο ερώτημα το 1910.

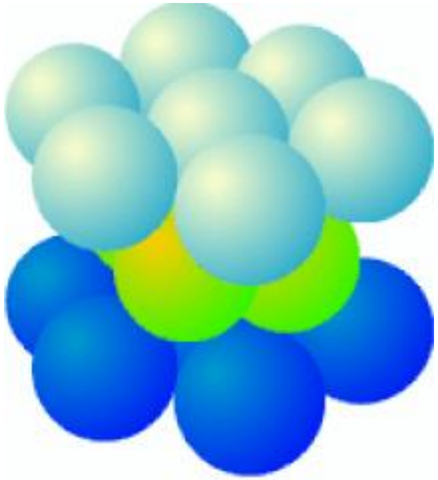
18ο Πρόβλημα: Τρία προβλήματα Τοπολογίας και Γεωμετρίας (2)

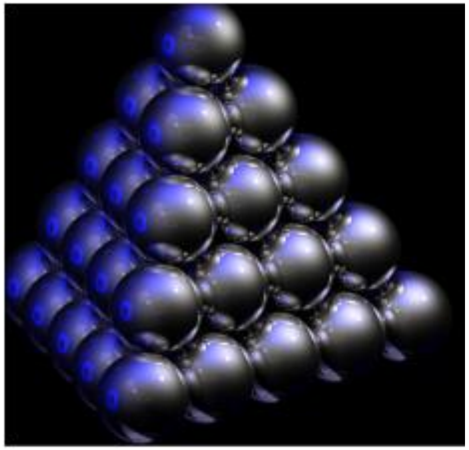
- Το δεύτερο μέρος του προβλήματος ρωτά αν υπάρχει πολύεδρο που καλύπτει τον $\mathbb{R}^3$ αλλά δεν είναι fundamental region καμίας space group. Ο Karl Reinhardt βρήκε πρώτος το 1928 ένα παράδειγμα τέτοιου πολυέδρου. Ο Hilbert έθεσε το ερώτημα για τις τρεις διαστάσεις πιστεύοντας ότι αυτό είναι αδύνατο στις δύο διαστάσεις, κάτι που αποδείχθηκε ότι δεν ισχύει από τον Hesch το 1935.

18ο Πρόβλημα: Τρία προβλήματα Τοπολογίας και Γεωμετρίας (3)

Ποια είναι η πιο πυκνή διάταξη μη επικαλυπτόμενων σφαιρών (και άλλων σχημάτων) στο χώρο; Το ερώτημα προέρχεται από μία παλιά εικασία του Kepler που λέει ότι καμία διάταξη ισομεγέθων σφαιρών δε μπορεί να κάνει τις σφαίρες να καταλαμβάνουν περισσότερο από 74% του χώρου. Ο Thomas Callister Hales το 1998 κατέληξε σε αυτό το συμπέρασμα με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή (κάτι που δεν θεωρείται αυστηρή απόδειξη)

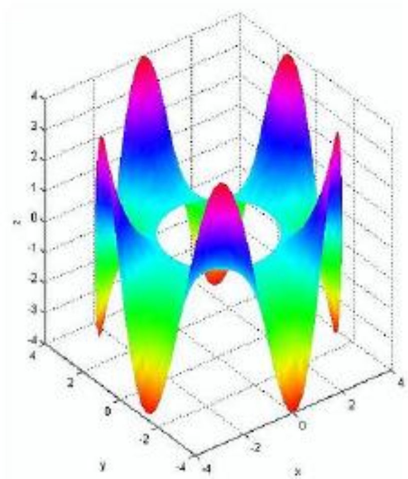


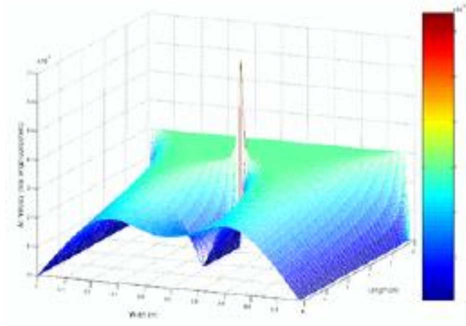


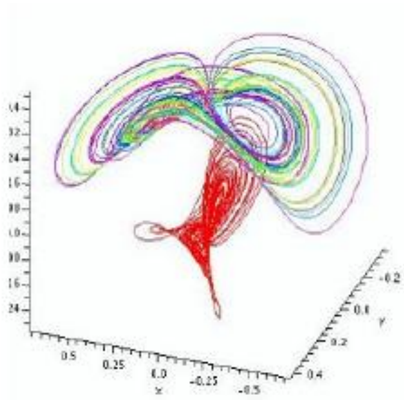


20ο Πρόβλημα: Προβλήματα οριακών τιμών

Στις αρχές του 20ου αιώνα τα προβλήματα οριακών τιμών (διαφορικές εξισώσεις με αρχικές συνθήκες) μόλις είχαν αρχίσει να μελετώνται συστηματικά. Η δουλειά που έγινε μέσα στον προηγούμενο αιώνα για τη μελέτη τέτοιων προβλημάτων και την ταξινόμηση των διαφορικών εξισώσεων ήταν τεράστια και σε πολύ μεγάλο βαθμό απαντήθηκε το ερώτημα αν έχουν όλα τα προβλήματα οριακών τιμών λύση.

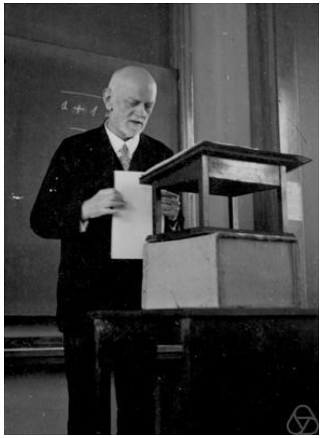






Hilbert (1)

Ο Hilbert με τη διορατικότητα του μπόρεσε και έθεσε σημαντικά ερωτήματα που απασχόλησαν γενιές μαθηματικών. Τα προβλήματά του έδωσαν τροφή για σκέψη και ώθησαν τη μαθηματική έρευνα για ένα ολόκληρο αιώνα. Ακόμη και σήμερα οι μαθηματικοί προσπαθούν να απαντήσουν σε κάποια από αυτά, πράγμα που δείχνει πόσο σημαντική ιστορικά ήταν η ομιλία του Hilbert για τα Μαθηματικά και πως είναι πολύ βασικό να θέτονται σωστά προβλήματα για την ανάπτυξη της επιστήμης.



Εικόνα 8

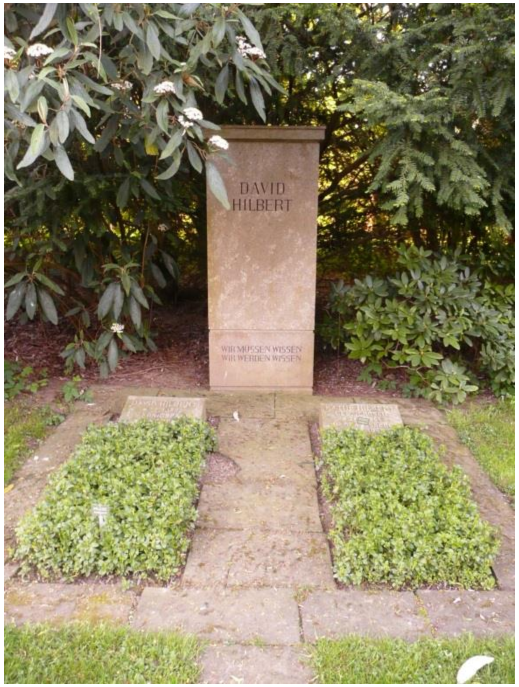


Εικόνα 9

Hilbert (2)



Εικόνα 10



Εικόνα 11

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/4)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1**: “**David Hilbert 1886**“ von Bei dieser Datei fehlen Angaben zum Autor. - http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Hilbert.htmlOriginally uploaded to de.wikipedia by Rdb 16:48, 16. Okt 2004. Lizenziert unter Public domain über Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:David_Hilbert_1886.jpg#mediaviewer/File:David_Hilbert_1886.jpg
- **Εικόνα 2**: "**Georg Cantor2**" by Unknown -http://i12bent.tumblr.com/post/3622180726/georg-cantor-german-mathematician-and-philosopher. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Cantor2.jpg#mediaviewer/File:Georg_Cantor2.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/4)

- **Εικόνα 3**: "**Kurt gödel**". Via Wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kurt_g%C3%B6del.jpg#mediaviewer/File:Kurt_g%C3%B6del.jpg
- **Εικόνα 4**: **Paul Cohen**, http://www.blog.republicofmath.com/wp-content/uploads/2011/05/Cohen.jpg
- **Εικόνα 5**: "**Georg Friedrich Bernhard Riemann**" by This file is lacking author information. - http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/explore.htm according to the German Wikipedia.. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg#mediaviewer/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (3/4)

- **Εικόνα 6**: **Christian Goldbach** , http://www.wired.com/geekdad/wp-content/uploads/2012/11/goldbach.jpg
- **Εικόνα 7**: "**EmilArtin**" by Konrad Jacobs, Erlangen - Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=116. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0-de via Wikimedia Commonshttp://commons.wikimedia.org/wiki/File:EmilArtin.jpg#mediaviewer/File:EmilArtin.jpg
- **Εικόνα 8**: “**David Hilbert Vorlesung 1932**“ von unknown, Copyright:MFO-The Oberwolfach Photo Collection, photo_id=17004.Lizenziert unter Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0-2.5-2.0-1.0 über Wikimedia Commons http://commons.wikimedia.org/wiki/File:David_Hilbert_Vorlesung_1932.jpg#mediaviewer/File:David_Hilbert_Vorlesung_1932.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (4/4)

- **Εικόνα 9**: Εικόνα 1.
- **Εικόνα 10**: "**Hilbert**". Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert.jpg#mediaviewer/File:Hilbert.jpg
- **Εικόνα 11**: "**HilbertGrab**" by Kassandro - Own work. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:HilbertGrab.jpg#mediaviewer/File:HilbertGrab.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 12: Τα 23 προβλήματα του Hilbert (Π. Κουλακίδου)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

  Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης